

Acta Academiae Scientiarum Taurinensis

ATTI
del
CONVEGNO
LAGRANGIANO

Torino, 22-25 ottobre 1963

*Supplemento al vol. 98 (1963-64) degli
Atti della Accademia delle Scienze di Torino*



TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1964



VINCENZO BONA - TORINO
(31555)

SALUTO DEL PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA
PROF. GIUSEPPE GROSSO
E CONFERIMENTO DEL PREMIO INTERNAZIONALE
« M. PANETTI » AL PROF. WILLIAM PRAGER

Signore e Signori,

Nel 1757 il ventitreenne Giuseppe Angelo Saluzzo di Mone-
siglio, cultore di studi chimici, formava in Torino, insieme con due
giovani discepoli del Beccaria, Luigi De La Grange di 21 anni e
Giovanni Cigna, di 23, una privata Società scientifica, che in meno
di due anni, col concorso di altri soci, pubblicava nel 1759 una *Mi-
scellanea philosophico-mathematica Societatis privatae taurinensis*,
contenente due notevoli memorie del De La Grange, e scritti del
Saluzzo, del Cigna, del Bertrandi, dell'Allioni.

Il favore con cui quel volume veniva accolto dagli scienziati
italiani e stranieri, valeva alla Società il crisma ufficiale di Società
reale, la quale si arricchiva di nuovi soci anche stranieri, tra cui il
Monge, il Laplace, il D'Alembert, il Condorcet. Quattro nuovi volumi,
dal titolo di *Mélanges de philosophie et de mathématique* segnavano
il cammino scientifico di questa Società reale, che nel 1783 acquistava,
dalle Regie Patenti del 25 luglio di quell'anno, il titolo di Accademia
Reale delle Scienze.

Questa Accademia delle Scienze passata, in due secoli, attraverso
tempi e regimi politici diversi, sempre con la continuità della sua
attività protesa nelle ricerche della scienza e poggiata sulla indipen-
denza e dignità degli uomini di studio, accresciutasi nel 1801 di una
classe *de littérature et beaux arts*, divenuta poi nel 1815 la classe di
scienze morali, storiche e filologiche, rende oggi solenni doverose
onoranze al più grande dei suoi fondatori, Luigi De La Grange, a
150 anni dalla sua morte, avvenuta a Parigi l'8 aprile del 1813.

Luigi Lagrange è uno di quegli uomini che non si perdono nella
nebulosa dei numi, ma che rimangono vivi in quello che hanno dato

alla scienza. La celebrazione di lui non poteva consistere in una serie di commemorazioni, ma può soltanto esprimersi nel dibattito vivo nel vivo di quei campi in cui egli ha accresciuto il patrimonio del sapere umano.

La partecipazione a questo simposio di insigni scienziati di diversi paesi — ai quali rivolgo il cordiale benvenuto, ed il ringraziamento per avere accettato di essere relatori — è la testimonianza del significato e valore di questo incontro nel nome di Luigi Lagrange.

Le Accademie di Berlino e di Parigi hanno accettato di essere compartecipi di questa celebrazione dell'uomo che diede ad esse un'attività feconda e illuminata.

Ma permettetemi di accettare questa testimonianza anche nei confronti dell'Accademia delle Scienze di Torino, le cui vetuste sale non vogliono essere soltanto le custodi di quelle sacre memorie che si raccolgono intorno ai nomi dei fondatori, e degli illustri scienziati che senz'altro facevano loro eco, quando il secondo volume della giovane società dei giovani scienziati già poteva ospitare una lettera di Eulero al Lagrange ed un lavoro di Alberto Haller; non vogliono essere solo testimonianza della continuità di una tradizione che ha visto apparire nelle Memorie e negli Atti studi notevoli dei più illustri uomini; ma vogliono essere ancora teatro vivo dei vivi dibattiti della scienza, in quell'incontro e in quella cooperazione di studiosi diversi di branche più o meno affini o lontane, che appunto si incarna nella odierna funzione delle Accademie.

Ci troviamo in uno di quei momenti della storia in cui l'uomo attinge dalla scienza sempre nuove aperture, cui guarda per un verso con esaltante attesa, per altro verso con sgomento: attesa di nuovi orizzonti di vita, sgomento di strumenti totalitari di distruzione e di morte.

Lo stretto legame tra scienza e applicazioni, fra conquiste della scienza e conquiste della tecnica, sembra dare al processo odierno tutto un suo ritmo, che se assume un aspetto di coralità nel lavoro di équipe, e nel procedere parallelo in paesi diversi, per altro verso rischia di perdere il valore dell'universalità dell'antica repubblica degli studi, per la specializzazione da un lato, per la gara tra i vari paesi dall'altro.

Occorre risalire all'universalità della scienza, cui del resto vuol rispingerci lo stesso significato intrinseco della odierna rivoluzione scientifica; e ciò potrà avvenire da un lato creando tra gli uomini

un clima di fiducia per cui la scienza non abbia altra applicazione pratica che quella volta ad alleviare ed elevare le condizioni dell'umanità, per altro verso favorendo gli incontri tra studiosi su una larga base.

E quest'ultima è appunto, nei confronti di società specializzate nazionali e internazionali, la funzione delle Accademie, nello spirito in cui esse sono sorte, in cui è sorta la nostra Accademia, come società di studio e di scienza.

Ed anche la tradizionale coesistenza ed il parallelo svolgersi di una classe di scienze matematiche, fisiche, naturali e di una classe di scienze morali, storiche, filologiche è un richiamo ad un binario comune di incontro degli studiosi, all'unità del progresso degli studi nell'unità dell'uomo.

Una delle forme in cui si concreta la funzione delle Accademie è appunto quella di chiamare volta a volta studiosi diversi da paesi diversi a discutere di un dato complesso di problemi. Ed oggi l'Accademia delle Scienze di Torino vi chiama a discutere di problemi attinenti a quello che constitui il campo di studi di Luigi Lagrange, di quegli studi che Lagrange recava alla Società torinese prima, alle Accademie di Berlino e di Parigi poi.

È questo un convegno qualificato di scienziati ad alto livello; ed io, che opero in un campo lontano di studi, nell'altra classe, e sono quindi un laico fra sì insigni chierici, non posso addentrarmi oltre; e temo che mi si possa dire che già ho travalicato il compito di esprimere lo spirito con cui l'Accademia delle Scienze ha promosso il Simposio.

L'Accademia nel promuoverlo ha sentito attorno a sé la solidarietà di molti enti nazionali e cittadini: il Ministero della Pubblica Istruzione, il Consiglio Nazionale delle Ricerche, la Provincia, il Comune, l'Università, il Politecnico, la Camera di Commercio, l'Unione Industriale, hanno tangibilmente contribuito per la riuscita di esso: a tutti un particolare ringraziamento a nome dell'Accademia. Essi hanno attestato che Torino, in particolare, sente che il suo sviluppo di oggi, che ne fa la grande città della tecnica, è radicato nello slancio degli uomini che ne hanno scritto il nome nell'albo della scienza.

Alla inaugurazione del Simposio viene unita la cerimonia del conferimento del terzo premio Panetti, premio di Lire un milione e cinquecentomila, che viene conferito a quello studioso che si è

maggiormente distinto nelle ricerche sulla meccanica applicata, nell'ultimo decennio, prescelto dalla Commissione attraverso un procedimento che parte dalla designazione dei più qualificati enti scientifici e accademie di tutti i paesi. Quest'anno il premio verrà conferito a William Prager, che dopo aver insegnato nelle Università di Gottinga, di Istambul, è oggi professore alla Brown University di Providence U.S.A.

Al Prof. Prager, che è pure relatore al Simposio, il cordiale benvenuto, e l'espressione del più vivo compiacimento per il riconoscimento che è stato attribuito a lui eletto, fra gli eletti, cioè fra designati dagli enti di ricerca e cultura ad alto livello.

Prego il Prof. Ferrari, Presidente della Commissione, di leggere la motivazione del premio al Prof. Prager.

RINGRAZIAMENTO
DEL
PROF. WILLIAM PRAGER

Monsieur le Président, Monsieur le Maire, Excellences, Mes Chers Amis et Collègues, Mesdames et Messieurs,

Tout d'abord je m'excuse de ne pas être capable d'exprimer mes sentiments en votre belle langue.

Je suis profondément touché de l'honneur qui m'est fait et je vous en remercie de tout cœur. Toute marque d'estime pour son œuvre est précieuse au chercheur. Ayant voué ma vie à l'enseignement de la mécanique appliquée et à la recherche dans ce domaine, j'apprécie tout particulièrement d'être choisi par les savants de la maison de Lagrange, créateur de la mécanique analytique, pour un prix qui porte le nom de feu le Professeur Modesto Panetti, dont j'ai longtemps admiré les études pénétrantes. Doutant que je mérite cet honneur, et sachant que je ne suis pas digne de l'éloge que mon ami, le Professeur Carlo Ferrari vient de prononcer, j'interprète ce choix comme un signe de votre bienveillance et de votre amitié. Aussi ma reconnaissance est-elle grande envers vous, Monsieur le Président, ainsi qu'envers mes amis et collègues de l'Académie des Sciences. Fier de ce nouveau titre de noblesse scientifique, je prends plaisir à exprimer mes meilleurs vœux pour l'avenir de cette illustre Académie et de cette belle ville de Turin dont je me sens, désormais, un peu citoyen.

Sguardo generale all'opera di Luigi Lagrange.

Riassunto. — *Breve biografia del Lagrange e sguardo generale alla sua opera scientifica, in cui prevalgono la fondazione della Meccanica Razionale e del Calcolo delle Variazioni, nonché i contributi alla teoria delle equazioni algebriche e a quella delle funzioni analitiche. Viene evitato, fin quando possibile, il linguaggio tecnico comprensibile dai soli matematici.*

Questa conferenza — con cui ho l'onore di dare inizio al simposio internazionale commemorante il 150° anniversario della morte del cofondatore di quest'Accademia, il grande Lagrange — ha principalmente lo scopo di dare ai non matematici (per i matematici non ce n'è bisogno) un'informazione generale sulla personalità e l'opera di questo grande scienziato che, per l'astrusa natura dei suoi studi, non è conosciuto quanto meriterebbe fuori della cerchia della gente del mestiere. Soprattutto poi, vorrei evitare che si crei la falsa idea che l'opera del Lagrange sia confinata nei due soli, pur vasti capitoli della matematica a cui è particolarmente dedicato il nostro simposio: il Calcolo delle Variazioni e la Meccanica teorica. In primo luogo occorrerà però, come necessario inquadramento, ricordare rapidamente i capisaldi della vita del Nostro.

Luigi Lagrange — propriamente, ai termini del tuttora esistente atto di battesimo, Giuseppe Lodovico Lagrangia — nacque a pochi passi di qui, nella via che ora porta il suo nome, il 25 gennaio 1736, primo di 11 figli, da Giuseppe Francesco Lodovico « tesoriere della regia artiglieria » e dalla sua consorte Maria Teresa Gros, figlia di un medico della vicina Cambiano.

La famiglia paterna (Lagrange-Tournier) era oriunda francese, della Turenna, ma tanto il padre quanto il nonno del Nostro erano nati in Piemonte ed avevano successivamente occupata quella carica di « tesoriere dell'artiglieria » o « delle fabbriche e fortificazioni »: qualcosa di mezzo fra l'amministrazione civile e l'esercito, che per lunghi anni fu come un feudo della famiglia.

Il giovane Giuseppe Lodovico — detto poi Giuseppe Luigi o anche Luigi soltanto — fu avviato, con suo poco entusiasmo, all'avvocatura e già a 14 anni lo troviamo iscritto alla facoltà giuridica dell'Università di Torino che, dopo le nuove costituzioni date da Vittorio Amedeo II nel 1720, andava lentamente risolleandosi dalla profonda decadenza in cui era caduta nell'epoca anteriore. Pare però che il Nostro s'interessasse ben poco degli studi di legge, tanto che non arrivò mai a prendere alcun regolare diploma. Cominciò invece ad interessarsi alle scienze, e specie alla matematica, di cui s'impadronì così bene, essenzialmente autodidatticamente, che già nel 1754, a soli 18 anni, cominciò ad essere conosciuto anche fuori dell'ambiente cittadino, soprattutto per effetto di una sua lettera al Conte di Fagnano (1672-1766): uno dei più eminenti matematici italiani del tempo, che poi, stampata, costituì la prima pubblicazione matematica del Lagrange, e la sua sola in lingua italiana. In essa egli ritrova (tali disavventure sono quasi inevitabili dai principianti, e non solo da loro!) la formula di Leibniz per la derivata *n*-esima del prodotto di due funzioni. Si spiega così la cosa « *assai particolare e meravigliosa* » (come fu detto) che l'anno seguente il Lagrange — appena diciannovenne e sprovvisto di regolari diplomi — venne nominato « sostituto del maestro di matematica » (che era allora un certo Carlo Andrea Rana) alla *Scuola di Teoria d'Artiglieria* dello Stato sabaudo: la progenitrice della posteriore, ben nota Accademia Militare di Artiglieria e Genio di Torino, che durò fino a pochi anni or sono. Ed è all'uopo da notarsi che, in quell'epoca, l'insegnamento matematico impartito in detta scuola era molto più elevato di quello dell'Università che, in ispecie, non comprendeva il calcolo infinitesimale o, come allora si diceva, il « calcolo sublime ».

Tuttavia, sebbene il Nostro raggiungesse in patria, in modo eccezionalmente rapido, una situazione ragguardevole, in tutti gli undici anni del suo ulteriore soggiorno a Torino, non ebbe alcun avanzamento nè alcuna altra speciale distinzione, nonostante che, nel frattempo, fosse divenuto universalmente noto come uno dei maggiori matematici dell'epoca ed avesse spiegata un'intensa attività scientifica. Fra l'altro, fu proprio in quel periodo che egli creò il Calcolo delle Variazioni e che — assieme al Co. Saluzzo di Menuisiglio e al medico Carlo Cigna — fondò (nel 1757) quella « Società privata torinese » che poco dopo, nel 1783, si trasformò nell'attuale Accademia (dianzi Reale) delle Scienze di Torino, che potrebbe perciò a buon titolo dirsi « lagrangiana ».

Non può pertanto sorprendere che, ad un certo punto, il Lagrange cominciò a non sentirsi più del tutto a suo agio in patria, e fece comprendere a qualcuno dei suoi corrispondenti, fra cui il grande D'Alembert (1717-1783), che non sarebbe stato alieno dall'idea di andare a stabilirsi altrove. Venne così, per intercessione appunto del D'Alembert, l'offerta di Federico II di Prussia al Nostro di trasferirsi a Berlino, onde prendere la successione di Euler (passato giusto allora a Pietroburgo) nella direzione della classe di scienze di quell'Accademia, sotto favorevoli condizioni morali e finanziarie. Poichè già il solo fatto di essere preso in considerazione come possibile successore del grande Euler, era uno dei maggiori onori che potesse essere fatto ad un matematico del tempo, il Lagrange non esitò ad accettare e — dopo aver ottenuto, non senza qualche difficoltà, il necessario permesso di espatrio dal re di Sardegna, che però non fece alcun serio tentativo di trattenerlo in patria mediante opportune offerte — nell'autunno 1766 raggiunse Berlino, ove sarebbe rimasto per ben ventuno dei migliori e più proficui anni della sua vita: dai trenta ai cinquantuno anni. Al proposito è però curioso osservare che — benchè risulti che il Lagrange studiò e probabilmente imparò bene il tedesco — mai nulla pubblicò in questa lingua che, del resto, non era quella dell'Accademia nè della Corte, ove la lingua ufficiale

era il francese! E nemmeno ci restano, che io sappia, lettere di Lagrange scritte in tedesco. Comunque pare che il Nostro si trovasse molto bene in Prussia dove, come scrisse in seguito, si godeva allora « sicurezza, quiete e libertà ». Ed ebbe buoni, seppure non frequenti, rapporti con Federico II, che lo preferiva ad Euler, a suo giudizio troppo religioso, mentre Lagrange poco o nulla si interessava a cose del genere.

La favorevole situazione accennò però a deteriorarsi dopo la morte (nel 1783) della prima moglie — una lontana parente che il Lagrange aveva sposata, quasi alla chetichella, nel 1767 — e, soprattutto, dopo la morte di Federico II (1786), che lasciava temere cambiamenti poco propizi ai dotti nella Corte prussiana. Cominciò così a maturare nell'animo del Nostro il proposito di passare ad altri lidi, ciò che, data l'alta fama nel frattempo da lui raggiunta, non poteva presentare serie difficoltà. Effettivamente, non appena la cosa cominciò a trapelare, non gli mancarono le offerte (fra cui una, non spregevole, del re di Sardegna e una di quello di Napoli) ma Lagrange finì, come era facilmente prevedibile, per accettare quella proveniente da Parigi, ove Luigi XVI gli offriva un posto di « *Pensionnaire vétéran* » in quell'Accademia delle Scienze, cui era congiunta una considerevole pensione annua e una onorevole situazione tra gli alti funzionari dello Stato. In tal modo l'ironia della sorte fece sì che il Lagrange — che nulla desiderava maggiormente, se non di poter attendere tranquillamente e serenamente ai suoi studi favoriti — venisse a stabilirsi a Parigi nel 1787, cioè alla vigilia di una delle più violente e sanguinose esplosioni dell'umana storia, che doveva avere proprio lì l'epicentro!

Ad ogni modo, grazie anche al suo carattere freddo e riservato, e alla natura dei suoi studi, la Rivoluzione non arrecò alcun serio disturbo al Lagrange, nonostante la sua qualità di straniero, suddito di uno Stato in guerra con la Repubblica, e la sua amicizia col Lavoisier, finito come tutti sanno. Si può anzi dire che la Rivoluzione mostrò della benevolenza verso di lui — che si era affrettato ad « aggiornarsi » firmandosi « *citoyen* » e consimili — facendo per lui un'esplicita eccezione al bando

contro gli stranieri. Fu inoltre mantenuto alla presidenza di quella *Commissione dei pesi e misure*, che tanto contribuì all'adozione del sistema decimale, da cui pure, durante il Terrore, furono espulsi uomini quali il Lavoisier e il Laplace. E non fu una presidenza solo onoraria, chè sembra si debba essenzialmente al Lagrange l'essere stato adottato come base del sistema metrico il numero 10, mentre altri avevano invece proposto il 12, che avrebbe forse presentato alcuni vantaggi. Ma si sarebbe dovuto corrispondentemente modificare anche il sistema di numerazione, e la riforma probabilmente non avrebbe attecchito.

La Rivoluzione servì anche a fare tornare all'insegnamento il Nostro che, sebbene non avesse alcuna particolare simpatia per esso, era un docente zelante ed efficacissimo, che formò allievi quali Cauchy, Fourier, Poisson ecc. e — solo italiano fra essi — Giovanni Plana. Invero, soppressa nel 1793 l'Accademia di Parigi, il Nostro fu indotto a tornare (dopo il già lontano undicennio torinese) all'insegnamento superiore, prima (1794) nella effimera (ma in appresso ricostituita) *École Normale Supérieure*, e poi (a partire dal 1795) in quella *École Polytechnique* che, anche per merito suo, salì presto ad alta fama.

Così come la Rivoluzione non aveva nociuto al Lagrange, neanche la restaurazione napoleonica gli nocque, anzi gli giovò grandemente, essendo egli evidentemente tutt'altro che uno studioso politicamente *engagé*! Egli acquistò invero rapidamente alta stima da parte di Napoleone, che l'aveva personalmente conosciuto fin dal 1797 nelle sedute dell'*Institut* (succeduto due anni prima alla disciolta Accademia) e che era particolarmente ben disposto verso i cultori delle scienze fisico-matematiche, tanto che, poco dopo, volle fare (senza molto successo) del Laplace un ministro dell'interno! Il Nostro ebbe invece il buon senso di non uscire mai dal suo campo specifico e quale professore, membro dell'*Institut* e del Senato nonchè, più tardi, Conte dell'Impero il 10 aprile 1813 concluse serenamente, fra i più alti onori, la sua laboriosa giornata, proprio quando la stella napoleonica cominciava ad offuscarsi

all'orizzonte. Fu amorosamente assistito fino all'ultimo dalla seconda moglie, figlia dell'astronomo Lemonnier (che aveva sposata nel 1792, nel cuore della Rivoluzione, e da cui, come anche dalla prima, non aveva avuto alcun figlio) e fu seppellito, con gran pompa, tre giorni dopo nel Pantheon parigino.

Riassunta così, per sommi capi, la vita del Lagrange — che ebbe la singolare ventura (o l'abilità) di potere continuare, sostanzialmente indisturbato, i propri alti studi in mezzo ad alcune delle più violente convulsioni della storia umana — non possiamo evitare, sotto pena di apparire reticenti, la controversa questione della nazionalità del Nostro che, cinquant'anni or sono, diede luogo a qualche non simpatica controversia. È egli da considerare come francese, o come italiano o — come equamente dice l'ultima edizione dell'Enciclopedia Britannica — quale un « *french-italian mathematician* »? Credo che la maggioranza dei non italiani lo considerino francese, a causa soprattutto del nome e della lingua in cui furono scritti quasi tutti i suoi lavori. Per di più, al momento della sua morte, Torino: la sua città natale era (sin dal 1798) annessa alla Francia ed egli era divenuto, di pieno diritto, un cittadino francese. Gli italiani tendono invece, si capisce, a considerare Lagrange come un italiano, fondandosi sul suo luogo di nascita (nonchè del padre, del nonno e degli ascendenti materni) e sul fatto che passò 30 anni della sua vita a Torino, contro i 26 passati a Parigi (e i 21 a Berlino). Personalmente propendo all'opinione che non si possa giudicare una siffatta questione, riguardante un uomo del Settecento quale il Lagrange, con criteri attuali; dimenticando cioè che il sentimento nazionale (e soprattutto la sua moderna esasperazione) è un fatto relativamente recente, dovuto soprattutto alla necessità di dare un conveniente substrato ideologico alla coscrizione obbligatoria, che nacque con la Rivoluzione francese. Quanto ai personali sentimenti del Lagrange, credo che a lui, in fondo, ben poco importasse della Francia, dell'Italia o della Germania, ed era dispostissimo a trovarsi bene ovunque lo lasciassero lavorare in pace, tanto se fosse al potere un Robespierre quanto un Napoleone; purchè,

si capisce, non lo mandassero alla ghigliottina! Non voglio con ciò dire che un siffatto modo di sentire sia encomiabile, ma il mondo non è popolato da soli eroi e, ci piaccia o no, è così che, in cuor loro, pensano i più, non esclusi i Lagrange!

Passo ora a cercare di dare un'idea — in quanto possibile senz'entrare in dettagli ermetici ai profani — dell'immensa opera scientifica del Lagrange che, opportunamente perfezionata dai successori, tra cui principalmente Cauchy e Weierstrass, costituisce buona parte delle basi della moderna matematica. Ed è opera immensa anche come ampiezza, chè l'edizione parigina curata dal Serret fra il 1867 e il 1892 delle Opere complete del Nostro occupa ben 14 grossi volumi.

Non mi pare dubbio che il principale tra i molti contributi portati dal Lagrange alla Scienza, sia stato la sistemazione della meccanica teorica in un corpo coerente di teorie fra loro razionalmente connesse, tanto che è invalso l'uso di chiamarla « *Meccanica razionale* », in contrapposizione alla *meccanica* nel senso del linguaggio ordinario. Tale sistemazione fu principalmente compiuta con la sua magistrale « *Mécanique analytique* » pubblicata a Parigi nel 1788 ma redatta nel precedente periodo berlinese. In essa occupa una posizione centrale quello che viene oggi detto il *principio dei lavori virtuali* (veramente Lagrange parlava di *velocità virtuali*) da cui vien fatta logicamente discendere l'intera Statica e — attraverso il principio di D'Alembert — anche tutta la Dinamica. Ma vi si trovano anche una quantità di altre cose fondamentali, tra cui, principalissime, le equazioni ora dette appunto lagrangiane — che reggono il moto di un qualsivoglia sistema dinamico avente un certo numero di « gradi di libertà ». È inoltre da notare che non si tratta soltanto di una sistemazione critico-speculativa (del genere, tanto per intenderci, del moderno *bourbakismo*) ma vi sono anche una quantità di applicazioni importanti, in buona parte originali, particolarmente nel campo della Meccanica celeste, di cui il Lagrange fu uno dei più grandi cultori dopo Newton. Tanto che, cosa dianzi inaudita, durante la sua permanenza a Berlino, fu ben cinque volte premiato dall'Accademia

di Parigi, che aveva messo a concorso vari premi in quel campo, per esempio, la teoria dei satelliti di Giove.

Altri fondamentali contributi del Lagrange concernono l'altra sezione del nostro Simposio: il Calcolo delle Variazioni, che può riguardarsi come da lui fondato. Si tratta, in sostanza, dell'estensione della teoria dei massimi e minimi delle *funzioni* al campo dei *funzionali*, cioè dei numeri dipendenti da tutte le « ordinate » del diagramma di un'indeterminata funzione, dall'inclinazione delle sue tangenti, ecc. Per esempio, il tempo impiegato da un carrello per scendere (senza attrito) da un dato punto *A* ad un dato punto *B* (non sulla stessa verticale di *A*) sotto l'effetto della forza di gravità, seguendo una rotaia di una certa forma, dipende ovviamente dalla forma di questa rotaia. Come deve essere foggiate acciocchè tale tempo sia il più breve possibile? Questo celebre « *Problema della brachistocrona* », che è un tipico problema di Calcolo delle Variazioni, era stato formulato e risolto alla bene e meglio (si trova che la rotaia deve avere la forma di un arco di *cicloide*) già molto prima che Lagrange se ne occupasse. Solo però con il Lagrange la sua soluzione viene inquadrata in un metodo generale: quello dello studio dell'effetto di una piccola *variazione* della curva da determinarsi, applicabile anche in tanti altri casi. Per esempio, nel non meno celebre « *problema degli isoperimetri* », conducente alla conclusione che, tra tutte le curve piane e chiuse aventi una medesima lunghezza, quella che racchiude la massima area è il cerchio. Problemi di questo genere devono la loro grande e tuttora viva importanza soprattutto al fatto che una gran quantità di leggi naturali, economiche, ecc. possono esprimersi in *forma variazionale*, cioè tradursi nella condizione che un certo funzionale (in genere: un integrale) debba essere massimo o minimo.

Un altro campo in cui il Lagrange ha impressa un'orma non peritura è l'*Algebra*, che ai suoi tempi (come, del resto, fino a pochi anni or sono) era intesa essenzialmente come teoria delle equazioni algebriche, cioè delle equazioni ottenute uguagliando a zero un polinomio di un certo grado *n*. Com'è noto

(a chi è noto) già nei primordi della nostra scienza, i matematici dell'antica Grecia erano riusciti a risolvere esaurientemente, per via geometrica, i problemi corrispondenti al caso $n = 2$, cioè alla risoluzione delle equazioni algebriche di 2° grado, che ancora oggi occupano tanta parte (forse una parte eccessiva), nell'insegnamento liceale della matematica. I matematici greci avevano invece dovuto arrestarsi di fronte ai problemi di terzo grado o superiore, per esempio di fronte al celebre *problema di Delo*: costruire il lato di un cubo di volume doppio di un cubo dato.

Fu merito insigne degli algebristi italiani del Rinascimento: Cardano, Tartaglia, Ferrari e altri, di essere riusciti a risolvere con mezzi algebrici (operazioni aritmetiche fondamentali ed estrazioni di radici) anche le equazioni di terzo e quarto grado; ed è di lì che, dopo la lunga notte del medioevo, prende inizio la matematica moderna. Nè essi però, nè molti altri che lo tentarono, riuscirono ad andar oltre, cioè a risolvere, con mezzi analoghi, anche equazioni di 5° grado e superiore; tranne in casi particolari. Perchè mai? Perchè i metodi dei succitati matematici rinascimentali, che riuscirono a ricondurre la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado a quella di certe « risolventi » di grado inferiore, fallivano nel caso del 5° grado o superiore?

Quest'enigma, che aveva tormentato molti grandi matematici dell'epoca, non fu completamente chiarito dal Lagrange e bisognò attendere i lavori del medico modenese Paolo Ruffini (1765-1822) e del grande matematico norvegese Niels Abel (1802-1829) per giungere finalmente alla dimostrazione dell'impossibilità, in generale, della risoluzione algebrica delle equazioni di grado superiore al quarto. Tuttavia fu il Nostro che spianò la via per la soluzione del problema collegando per la prima volta i metodi per la risoluzione di un'equazione algebrica allo studio delle possibili *permutazioni* delle sue radici, ciò che doveva poi fornire la chiave del mistero. E taccio, per necessaria brevità, di altri meriti algebrici del Lagrange — per esempio in quella che fu poi detta *teoria delle forme* — nonchè dei suoi studi aritmetici, per esempio nel campo dell'*analisi indeterminata* di 2° grado.

Il Lagrange ha anche molto sentito un altro dei grandi problemi matematici della sua epoca e della successiva: la necessità di porre su più solide fondamenta l'analisi infinitesimale di Newton e Leibniz. Analisi che — sebbene avesse già ottenuti così smaglianti successi da mettere fuori questione la sua sostanziale validità — riposava ancora su basi così vacillanti che, ad esempio, il D'Alembert, ad un principiante che aveva sollevato dei dubbi tutt'altro che infondati su alcuni punti di essa, non potè che rispondere: « *Allez en avant, la foi vous viendra!* ». Bisogna però riconoscere che il Lagrange — che era già perfettamente conscio di uno dei due principi fondamentali della matematica moderna: l'opportunità d'inquadrare i problemi in una visione generale delle cose, ma non ancora abbastanza dell'altro: la necessità dell'assoluto rigore logico — non ebbe la mano molto felice nel cercare di porre su nuove basi il « calcolo sublime ». Invero, il Nostro — ubbidendo alla sua, del resto sana, tendenza a respingere ai margini della matematica le questioni « metafisiche » o che, comunque, non parevano suscettibili di una precisa formulazione — credè di poter eliminare radicalmente le difficoltà inerenti alla definizione delle *derivate* di una funzione come quoziente d'infinitesimi, partendo dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione, che postulò valido *a priori*; sviluppo i cui successivi coefficienti stanno in semplicissimo rapporto con le successive derivate della funzione.

Il guaio è che — contrariamente a quel che Lagrange riteneva — non poche funzioni, anche molto semplici e che si presentano ben spontaneamente, per esempio: la più breve distanza del punto d'ascissa x da due punti fissi (per esempio 0 ed 1), non sono sviluppabili in serie di Taylor! Comunque, anche quando sbaglia, un uomo di genio come il Lagrange difficilmente fa un'opera del tutto inutile (mentre quelli che valgono poco, anche senza sbagliare, riescono spesso a fare opere del tutto inutili!) e così il Nostro, seppur non riuscì nell'intento che si era proposto, iniziò senza volerlo lo studio di un fondamentale capitolo della moderna Analisi: quello appunto delle funzioni sviluppabili in serie di Taylor o *funzioni*

« *analitiche* » come più brevemente si chiamano, con la stessa locuzione usata dal Lagrange. Fra l'altro, queste funzioni, sono le sole (o quasi) che sia utile considerare anche nel campo dei numeri complessi, come più tardi mostrò, fra gli altri, A. Cauchy (1789-1857), il più grande degli allievi del Lagrange all'« *École Polytechnique* », a cui principalmente si deve il raggiungimento del fine sfuggito al Maestro: il consolidamento delle basi dell'Analisi infinitesimale, per mezzo di un'adeguata teoria dei *limiti* delle successioni e delle funzioni.

Del resto, anche a prescindere da quanto sopra, nel *traité des fonctions analytiques* del Lagrange e nelle *Leçons sur le calcul des fonctions* che ne costituiscono la continuazione, si trovano una quantità di cose interessanti che basterebbero già ampiamente a giustificare la pubblicazione, per esempio, il teorema del valor medio; la formula (detta appunto di Lagrange) per il resto della serie di Taylor arrestata ad un suo certo termine, ecc.

A chiusura di questo rapido e incompleto sguardo all'opera del Lagrange, vogliamo infine accennare ad una delle sue ultime (1809, a 73 anni) scoperte matematiche: quella del *metodo della variazione delle costanti arbitrarie* nell'integrazione delle equazioni differenziali lineari, perchè è un classico esempio — meritevole di essere seriamente meditato nei tempi che corrono — di quanto la matematica pura possa guadagnare dai contatti con quella applicata. Come è noto a chi conosce il Calcolo, questo metodo importante consiste nel cercare di soddisfare un'equazione differenziale lineare *non omogenea*, sostituendo alle costanti arbitrarie che compaiono nell'integrale generale della corrispondente equazione omogenea, opportune funzioni da determinarsi (onde lo strano nome del metodo), ciò che risulta abbastanza facile. Orbene il Lagrange giunse a quest'idea — che pare semplice solo dopo che la si è avuta — partendo da un fondamentale problema di Meccanica celeste in cui essa si presenta in modo del tutto spontaneo. Per comprenderlo, pensiamo al movimento della Terra intorno al Sole. Se non ci fossero anche la Luna, Giove e gli altri pianeti, tale movi-

mento avverrebbe, come molti ricorderanno, secondo un'orbita ellittica con uno dei suoi *fuochi* nel Sole, orbita i cui « elementi » (asse maggiore, eccentricità, ecc.) dipendono dalle costanti arbitrarie che si presentano nell'integrazione dell'equazione differenziale del problema. Dato però che ci sono anche le accennate « perturbazioni », il movimento non sarà più esattamente, ma solo approssimativamente ellittico, e si presenta del tutto spontanea l'idea di pensare che l'orbita sia ancora un'ellisse, ma un'ellisse i cui elementi *variano col tempo*; il che si rivela molto vantaggioso, perchè tali variazioni risultano molto piccole e molto lente. Ecco come Lagrange giunse al suo metodo di variazione delle costanti arbitrarie, che poi giovò anche in tanti altri casi!

Cose di questo genere vanno, come dicevo più sopra, particolarmente meditate nei nostri tempi, in cui un'esagerata tendenza della matematica all'astrazione più spinta, disgusta e respinge quelli che della matematica hanno bisogno per applicarla. Invero l'imminente divorzio della matematica dalle sue applicazioni, nuocerà certamente a queste ultime, ma anche e forse ancor più alla matematica pura.

E nei nostri inquieti tempi vale anche la pena di ricordare le serene, quasi socratiche parole con cui Lagrange si congedò da un gruppo di amici andati a salutarlo e a portargli, per incarico di Napoleone, un'alta decorazione, due giorni prima della morte:

« La morte non è da temere: quand'essa arriva senza sofferenza, è come un'ultima funzione della vita, non penosa nè sgradevole ... Ho terminata la mia carriera, ho acquistata qualche celebrità nelle Matematiche, non ho odiato alcuno, non ho fatto del male, e bisogna pur finire! ».

È una non spregevole versione laica del ben noto congedo paolino:

« Io ho combattuto il buon combattimento, ho finito la corsa, ho serbata la fede, ecc ... » (II Timoteo IV, 7-8).

Criteri sufficienti nel Calcolo delle variazioni e loro applicazioni.

Riassunto. — Si enunciano teoremi che forniscono criteri sufficienti per il minimo assoluto di integrali pluridimensionali dipendenti da un vettore a più componenti e dalle derivate parziali di questo, d'ordine qualsivoglia. Si indicano applicazioni a teoremi di unicità per le soluzioni di talune equazioni funzionali e alla separazione degli autovalori di un parametro da cui queste dipendano. Le dimostrazioni dei teoremi enunciati trovansi esposte in una recente Memoria dell'Autore, dedicata allo stesso argomento, pubblicata nel Vol. VII della Serie VIII delle Memorie fisiche della Sezione I^a dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

INTRODUZIONE

Per una funzione reale $u(x_1, x_2, \dots, x_r)$ delle r variabili reali $x_1, x_2, \dots, x_r$, di classe μ , le sue derivate parziali, da quelle del primo a quelle d'ordine μ , incluse, sono in numero di

$$\frac{(\mu + r)!}{\mu! r!} - 1.$$

Denoterò con (μ, r) tale numero e, numerate con una certa regola prestabilita tutte quelle derivate, denoterò col simbolo

$$\mathcal{D}_h u \quad [h = 1, 2, \dots, (\mu, r)]$$

la derivata parziale della u alla quale compete il numero h e con $\mu_h (\leq \mu)$ l'ordine di tale derivata. Designerò inoltre, con

A un dominio regolare dello spazio reale euclideo X , e r dimensioni, il cui punto generico sia indicato con x e con $x_1, x_2, \dots, x_r$ lo siano le sue coordinate;

$\mathcal{F}A$ la frontiera di A ;

$y^*(x)$ un assegnato vettore a n componenti reali

$$y_i^*(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

funzioni del punto x , continue nel dominio A ;

$\varrho'(x)$ e $\varrho''(x)$ due vettori, del pari, a n componenti reali

$$\varrho_i'(x), \varrho_i''(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

funzioni del punto x , definite nel dominio A , potendo queste divenire o essere sempre infinite, verificanti le condizioni:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_i'(x) \geq 0, \quad \varrho_i''(x) \geq 0, \quad & \text{per } x \in A \\ \varrho_i'(x) + \varrho_i''(x) > 0, \quad & \text{per } x \in A - \mathcal{F}A \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

Y lo spazio reale euclideo, ad n dimensioni, il cui punto generico sia indicato con y e con $y_1, y_2, \dots, y_n$ lo siano le sue coordinate;

$R(x)$ un dominio rettangolare dello spazio Y , funzione del punto x , definita in A , dal verificarsi delle condizioni:

$$x \in A, \quad y_i^*(x) - \varrho_i'(x) \leq y_i \leq y_i^*(x) + \varrho_i''(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$B[y^*(x), \varrho'(x), \varrho''(x)]$ l'insieme, supposto un dominio, dello spazio $X \times Y$, del punto $(x, y) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_n)$ a $r + n$ dimensioni, luogo dei punti per i quali si ha:

$$x \in A, \quad y \in R(x);$$

C un campo convesso (cioè un insieme aperto convesso) dello spazio euclideo P a

$$n \cdot (\mu, r)$$

dimensioni, il cui punto generico sia indicato con p e con

$$p_{ih} \quad [i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, (\mu, r)]$$

lo siano le sue coordinate;



$E^{(v)}$, essendo v un fissato numero naturale non inferiore a μ , un assegnato insieme di vettori $y(x)$, a n componenti reali

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

funzioni del punto x , di classe v in A , per ciascuno dei quali, per x in A , il punto

$$[x, y(x)] \equiv [x_1, x_2, \dots, x_r; y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$$

è in B e, posto

$$p_{ih} = \mathcal{D}_h y_i(x) \quad [i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, (\mu, r)],$$

il punto

$$\mathcal{D}_h y_i(x) \quad [i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, (\mu, r)]$$

è in C ;

$$f(x, y, p) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_n; p_{11}, p_{12}, \dots, p_{n, (\mu, r)})$$

un'assegnata funzione reale del punto (x, y, p) , continua nell'insieme $B \times C$, dello spazio $X \times Y \times P$.

Designando, per ogni vettore $y(x)$ di $E^{(v)}$, con $\mathcal{D}y(x)$ la matrice iperjacobiana

$$((\mathcal{D}_h y_i(x)))$$

come con p sarà designata la matrice

$$((p_{ih})),$$

dall'identità

$$If(y) \equiv \int_A f[x, y(x), \mathcal{D}y(x)] dx$$

viene definita, nell'insieme $E^{(v)}$, un funzionale $I_f(y)$ del vettore $y(x)$, che sarà detto *un integrale r -dimensionale, di μ^{mo} ordine, dipendente da un vettore a n componenti*.

Il problema generale di Calcolo delle variazioni che, in primo luogo, mi propongo di considerare è il seguente.

Dare criteri sufficienti affinché un fissato vettore $\bar{y}(x)$ dell'insieme $E^{(v)}$ conferisca al funzionale $I_f(y)$ il suo minimo assoluto in $E^{(v)}$.

Il problema è classico e la sua considerazione risale a Eulero e a Lagrange che dettero però, soltanto, i primi criteri necessari per il minimo, in casi particolari celebri. I primi criteri sufficienti furono dati da Weierstrass, nel caso in cui l'integrale $I(y)$ sia unidimensionale, $r = 1$, o bidimensionale, $r = 2$, sia del primo ordine, $\mu = 1$, e il vettore $y(x)$ si riduca ad uno scalare, $n = 1$.

Nel 1922, nel mio corso di Analisi superiore all'Università di Catania, e al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, colà tenutosi nello stesso anno, considerai alcuni criteri sufficienti negli stessi casi trattati da Weierstrass, criteri che risultano meno restrittivi di quelli dati dal grande autore.

Se si approfondiscono le analisi che conducono a questi criteri, si vede — alla fine — che tutto consiste nella costruzione e nell'impiego di quelle funzioni che, in una mia Memoria lineea del 1961, dedicata al caso in cui l'integrale $I_f(y)$ è del primo ordine e ad un particolare insieme $E^{(v)}$, ho chiamato *funzioni d'invarianza relative a quell'insieme*. Devo dire che le dette funzioni furono — come appresi da una superficiale recensione del GRAVES, apparsa nel fascicolo del luglio 1961 della Math. Reviews, di una mia nota sullo stesso argomento, del 1960 — considerate anche, nel caso del primo ordine e per un particolare insieme $E^{(v)}$, dalla Scuola di Chicago, di cui un componente, il signor A. W. LANDERS, iniziò uno studio, in una memoria, pubblicata durante l'ultima guerra mondiale, precisamente nel 1942, dalla Univ. Chicago Press.

Considererò, brevemente, in condizioni di grande generalità e per la funzione $f(x, y, p)$ e per l'insieme $E^{(v)}$, il metodo della funzione d'invarianza, per l'ottenimento di criteri sufficienti di minimo assoluto per l'integrale $I_f(y)$ in quell'insieme ed indicherò, in secondo luogo, l'applicazione dei criteri ottenuti alla separazione degli autovalori per un parametro da cui dipendono certe equazioni funzionali, che, in casi particolari

importanti, possono ridursi al sistema di equazioni a derivate parziali di EULERO-LAGRANGE, con condizioni, sul dominio o alla frontiera, anche di tipo integrale.

Dirò, brevemente, che il vettore $\hat{y}(x)$ di $E^{(v)}$ rende minimo o minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$ se $I_f(\hat{y})$ è il minimo assoluto di $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, che $\hat{y}(x)$ fornisce il minimo proprio di $I_f(y)$ in $E^{(v)}$ o che $\hat{y}(x)$ minimizza propriamente $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, oppure che $I_f(\hat{y})$ è il minimo proprio di $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, se si ha, in $E^{(v)}$,

$$I_f(y) - I_f(\hat{y}) > 0, \quad \text{per } y(x) \neq \hat{y}(x).$$

Adotterò la seguente notazione semplificatrice. Se $\hat{y}(x)$ indica un fissato vettore di $E^{(v)}$ e $\varphi(x, y, p)$ una funzione definita in $B \times C$, col simbolo

$$\hat{\varphi}(x),$$

indicherò la funzione del punto x , definito, in A , sull'identità:

$$\hat{\varphi}(y) \equiv \varphi[x, \hat{y}(x), \mathfrak{D}\hat{y}(x)].$$

Le derivate parziali del primo ordine, eventualmente esistenti, della funzione f , rispetto alle variabili x_l, y_i, p_{ih} , saranno indicate coi simboli

$$f_{x_l}, f_{y_i}, f_{p_{ih}} \quad [l = 1, 2, \dots, r; i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, (\mu, r)]$$

quelle del second'ordine, coi simboli

$$f_{x_l x_{l'}}, \dots, f_{y_i y_j}, f_{y_i p_{jh}}, f_{p_{ih} p_{jk}} \\ [l, l' = 1, 2, \dots, r; i, j = 1, 2, \dots, n; h, k = 1, 2, \dots, (\mu, r)], \text{ ecc.}$$

Se la funzione f possiede, continue in $B \times C$, tutte le derivate parziali $f_{p_{ih}}$, dirò che una funzione $\hat{y}(x)$ di $E^{(v)}$ è regolare, rispetto alla funzione f , se, supposto che sia

$$\mathfrak{D}^h \equiv \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_r}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_r^{k_r}},$$

la funzione

$$f_{p_{ih}}(x) \equiv f_{p_{ih}}[x, \hat{y}(x), \mathfrak{D}\hat{y}(x)], \quad [i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, (\mu, r)],$$

possiede, continue in A , tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_r}}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_r^{l_r}} \dot{f}_{p_{in}}(x),$$

essendo

$$l_1 \leq k_1, l_2 \leq k_2, \dots, l_r \leq k_r.$$

Supposta la funzione f , oltrechè continua in $B \times C$, ivi di classe uno rispetto alle variabili y_i e p_{in} , chiamerò *operatore di EULERO-LAGRANGE*, l'operatore che fa passare dal vettore $y(x)$ ad n componenti, al vettore avente lo stesso numero di componenti, date da

$$\begin{aligned} f_{y_i}[x, y(x), \mathcal{D}y(x)] + \sum_{h=1}^{(\mu, r)} (-1)^{\mu_h} \mathcal{D}_h \dot{f}_{p_{in}}[x, y(x), \mathcal{D}y(x)], \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Per tale operatore adatterò la notazione

$$\mathcal{E}^f$$

e per la componente i^{ma} del vettore $\mathcal{E}^f(y)$ la notazione

$$\mathcal{E}_i^f(y).$$

La *variazione prima* dell'integrale $I_f(y)$ relativa al passaggio dal vettore $\dot{y}(x)$ al vettore $y(x)$ di $E^{(1)}$ è data dall'integrale

$$\int_A \sum_{i=1}^n \left[\dot{f}_{y_i} \cdot (y_i - \dot{y}_i) + \sum_{h=1}^{(\mu, r)} \dot{f}_{p_{in}} \cdot \mathcal{D}_h (y_i - \dot{y}_i) \right] dx,$$

e ha interesse osservare un'espressione di essa alla quale si perviene, nell'ipotesi che la funzione $\dot{y}(x)$ sia regolare ⁽¹⁾, mediante successive integrazioni per parti in ciascuno degli integrali

$$\int_A \dot{f}_{p_{in}} \cdot \mathcal{D}_h (y_i - \dot{y}_i) dx.$$

(1) È sottointeso: «rispetto alla funzione f »

La detta espressione è data dall'identità:

$$\begin{aligned} & \int_A \sum_{i=1}^n \left[\dot{f}_{y_i} \cdot (y_i - \dot{y}_i) + \sum_{h=1}^{(\mu, r)} \dot{f}_{p_{ih}} \cdot \mathfrak{D}_h(y_i - \dot{y}_i) \right] dx \equiv \\ & \equiv \int_{\mathfrak{F}A} \sum_{i=1}^n \sum_{\mu_h \leq \mu-1} \dot{g}_{ih}(x) \cdot \mathfrak{D}_h(y_i - \dot{y}_i) d\sigma + \int_A \sum_{i=1}^n \mathfrak{E}_i^f(\dot{y}) (y_i - \dot{y}_i) dx, \end{aligned}$$

ove le $\dot{g}_{ih}(x)$ sono ben determinate funzioni di x , definite su $\mathfrak{F}A$, continue su ogni porzione di ipersuperficie regolare appartenente a $\mathfrak{F}A$, che dipendono dalla $f(x, y, p)$, dalla $\dot{y}(x)$ e dalla $\mathfrak{F}A$. L'apposizione dell'indice o su g_{ih} ha l'ufficio di ricordare che la $\dot{g}_{ih}(x)$ dipende dalla $\dot{y}(x)$ e non dalla $y(x)$.

Ogni funzione $y(x)$ di $E^{(\nu)}$ che sia regolare e soddisfi, nel dominio A , il sistema di equazioni di EULERO-LAGRANGE, a derivate parziali d'ordine 2μ ,

$$(1) \quad \mathfrak{E}_i^f(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

sarà detta un'estremale per l'integrale $I_f(y)$.

Dirò che l'insieme $E^{(\nu)}$ è convesso se, comunque, si assumano due vettori $y'(x)$, $y''(x)$ di $E^{(\nu)}$, appartiene sempre ad $E^{(\nu)}$ ogni vettore

$$y(x) = y'(x) + t[y''(x) - y'(x)],$$

con t costante reale arbitraria, verificante la limitazione:

$$0 \leq t \leq 1.$$

È tale l'insieme $E^{(\nu)}$ se esso è la totalità delle funzioni $y(x)$, di classe ν in A , per i quali il punto $[x, y(x), \mathfrak{D}y(x)]$ è sempre in $B \times C$, ed un certo numero di assegnati operatori distributivi, operanti su $y(x)$, devono avere risultati prescritti.

Dirò l'insieme $E^{(\nu)}$ di Dirichlet se, essendo $\bar{y}(x)$ un prescritto vettore a n componenti, funzioni del punto x , di classe μ in A , per il quale il punto $[x, \bar{y}(x), \mathfrak{D}\bar{y}(x)]$ è sempre in $B \times C$,

$E^{(\nu)}$ è la totalità dei vettori $y(x)$ funzioni di x , di classe ν in A , per le quali il punto $[x, y(x), \mathfrak{D}y(x)]$ è sempre in $B \times C$, verificanti, sulla frontiera di A , le identità:

$$y(x) \equiv \bar{y}(x), \quad \text{per } x \in \mathcal{F}A.$$

$\mathfrak{D}_h y(x) \equiv \mathfrak{D}_h \bar{y}(x)$, per $x \in \mathcal{F}A$ e per ogni indice h , per cui $\mu_h \leq \mu - 1$.

Evidentemente, un insieme $E^{(\nu)}$ di Dirichlet è convesso e libero di condizioni nell'interno di A .

Dirò che l'insieme $E^{(\nu)}$ è *totalmente libero di condizioni* se, essendo sempre

$$\varrho'(x) + \varrho''(x) > 0 \quad \text{per } x \in A \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

l'insieme $E^{(\nu)}$ è la totalità delle funzioni $y(x)$ di classe ν in A , per i quali il punto $[x, y(x), \mathfrak{D}y(x)]$ è sempre in $B \times C$. Ovviamente, un tale insieme è convesso.

I. — PRIMI CRITERI SUFFICIENTI E LE FUNZIONI D'INVARIANZA.

Un banale primo criterio sufficiente ha il seguente enunciato. La funzione $\hat{y}(x)$ minimizza $I_f(y)$ in $E^{(\nu)}$, se, per ogni punto (x, y, p) di $B \times C$, risulta

$$(1.1) \quad f(x, y, p) - f[x, \hat{y}(x), \mathfrak{D}\hat{y}(x)] \geq 0,$$

e propriamente se, comunque si fissi x in A , ha luogo nella (1.1) l'eguaglianza soltanto per $y = \hat{y}(x)$. Meno restrittivamente, $\hat{y}(x)$ minimizza $I_f(y)$ in $E^{(\nu)}$, se per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(\nu)}$, risulta

$$(1.2) \quad f[x, y(x), \mathfrak{D}y(x)] - f[x, \hat{y}(x), \mathfrak{D}\hat{y}(x)] \geq 0,$$

e propriamente se nella (1.2) ha luogo l'eguaglianza soltanto per $y(x) \equiv \hat{y}(x)$. Un criterio sufficiente meno banale, pur esso immediato, ha il seguente enunciato.

Supposto l'insieme $E^{(v)}$ di Dirichlet, la funzione $\hat{y}(x)$ minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, se si possono scegliere le $n \cdot (\mu, v)$ costanti:

$$c_{ih} \quad [i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, (\mu, r)],$$

in maniera da risultare, sempre in $B \times C$,

$$(1.3) \quad f(x, y, p) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{(\mu, r)} c_{ih} (p_{ih} - \mathcal{D}_h \hat{y}_i) - f[x, \hat{y}(x), \mathcal{D}\hat{y}(x)] \geq 0,$$

e propriamente se, comunque si fissi x in A , ha luogo nella (1.3) l'eguaglianza soltanto per $y = \hat{y}(x)$. Meno restrittivamente, $\hat{y}(x)$ minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, se, per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$, risulta

$$(1.4) \quad f[x, y(x), \mathcal{D}y(x)] - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{(\mu, r)} c_{ih} [\mathcal{D}_h y_i(x) - \mathcal{D}_h \hat{y}_i(x)] - f[x, \hat{y}(x), \mathcal{D}\hat{y}(x)] \geq 0$$

e propriamente se nella (1.4) ha luogo l'eguaglianza soltanto per $y(x) \equiv \hat{y}(x)$.

Valendo, infatti, la (1.3) o la (1.4) si ha, per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$, $I_f(y) - I_f(\hat{y}) \geq 0$, poichè

$$\int_A \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{(\mu, r)} c_{ih} \mathcal{D}_h y_i(x) dx$$

è costante in $E^{(v)}$.

Questo esempio, ben semplice, suggerisce una via da seguire per ottenere criteri sufficienti più generali. Quello della ricerca di funzioni $v(x, y, p)$, continue in $B \times C$, per le quali l'integrale

$$I_v(y) = \int_A v[x, y(x), \mathcal{D}y(x)] dx$$

è costante in $E^{(v)}$. In possesso di una tale funzione si ha il generale criterio sufficiente del seguente enunciato.

I. La funzione $\hat{y}(x)$ minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, se, per ogni punto (x, y, p) di $B \times C$, risulta:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & f(x, y, p) - v(x, y, p) \\ & + v[x, \hat{y}(x), \mathcal{D}\hat{y}(x)] - f[x, \hat{y}(x), \mathcal{D}\hat{y}(x)] \geq 0, \end{aligned}$$

e propriamente se, comunque si fissi x in A , ha luogo l'eguaglianza nella (1.5) soltanto per $y = \hat{y}(x)$.

Meno restrittivamente, $y(x)$ minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, se per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$ risulta:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & f[x, y(x), \mathcal{D}y(x)] - v[x, y(x), \mathcal{D}y(x)] \\ & + v[x, \hat{y}(x), \mathcal{D}\hat{y}(x)] - f[x, \hat{y}(x), \mathcal{D}\hat{y}(x)] \geq 0, \end{aligned}$$

e propriamente se nella (1.6) ha luogo l'eguaglianza soltanto per $y(x) \equiv \hat{y}(x)$.

Evidentemente, un tale criterio sarà tanto più potente quanto più vi è di arbitrario nella funzione $v(x, y, p)$ e si può affermare che il progresso nella potenza di simili criteri sufficienti consiste in quello dell'arbitrarietà della funzione $v(x, y, p)$ impiegata.

Una funzione $v(x, y, p)$, continua in $B \times C$, per la quale l'integrale $I_v(y)$ è costante in $E^{(v)}$ è stata da me chiamata, in taluni casi particolari precedentemente considerati, *funzione d'invarianza per l'integrale $I_v(y)$ nell'insieme $E^{(v)}$* e così seguirò a chiamarla in generale. Ricorrendo a queste funzioni, il compito di colui che ricerca criteri sufficienti i più efficaci possibili, può limitarsi a quello della costruzione di funzioni d'invarianza che godano di un'arbitrarietà la più grande possibile. Per un tale compito giova tener presente che se la funzione $v(x, y, p)$ è d'invarianza nell'insieme $E^{(v)}$, una qualsivoglia funzione $y(x)$ di questo insieme, simultaneamente minimizza e massimizza $I_v(y)$ nell'insieme stesso e pertanto devono essere, per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$, simultaneamente soddisfatte le condizioni necessarie per il minimo e per il massimo di $I_v(y)$ in $E^{(v)}$. Pervenuti ad una funzione $v(x, y, p)$ che verifica questa condizione, essa sarà certamente funzione d'invarianza per

$I_v(y)$ in $E^{(v)}$, se, ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$ simultaneamente verifica le condizioni sufficienti per il minimo e per il massimo di $I_v(y)$ in $E^{(v)}$.

Si è così pervenuti ai teoremi seguenti che consentono di ottenere alcune delle funzioni di invarianza di cui oggi si è in possesso.

II. Se l'insieme $E^{(v)}$ è di Dirichlet, una funzione $v(x, y, p)$, di classe uno in $B \times C$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih} , e rispetto alla quale ogni funzione di $E^{(v)}$ è regolare, è d'invarianza per $I_v(y)$ in $E^{(v)}$, se il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange (I) è un'identità in $E^{(v)}$.

III. Se l'integrale $I_v(y)$ è del primo ordine ($\mu = 1$) e l'insieme $E^{(v)}$, con $v \geq 1$, è di Dirichlet, è funzione di invarianza — ed è la più generale se $(n-1)(r-1) = 0$ — quella definita dall'identità:

$$(I.7) \quad v(x, y, p) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^r v^{ih}(x, y) p_{ih} \\ + \int_{y^*(x)}^y \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^r v_{x_h}^{ih}(x, y) dy_i + \hat{v}(x),$$

nella quale:

le $v^{ih}(x, y)$ sono $r \cdot n$ funzioni arbitrarie, continue in B , con le derivate

$$v_{x_h}^{ih}, v_{y_j}^{ih}, v_{x_h y_j}^{ih}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, r)$$

verificanti, in B , le identità

$$v_{y_j}^{ih} \equiv v_{y_i}^{jh};$$

$\hat{v}(x)$ è un'arbitraria funzione continua del punto x ;

l'integrazione è eseguita lungo una qualsiasi curva assolutamente continua, tracciata nel dominio $R(x)$ dello spazio Y , congiungente il punto $y^*(x)$ col punto y .

IV. Se l'integrale $I_v(y)$ è del primo ordine e l'insieme $E^{(v)}$, con $v \geq 1$, è un qualsivoglia insieme convesso, è funzione di invarianza quella definita dalla (1.7), le $v^{ih}(x, y)$ verificando le condizioni imposte dal teor. prec., ed inoltre le identità

$$v^{ih}(x, y) \equiv 0, \quad \text{per } x \in \mathcal{F}A.$$

Possono, tali funzioni, ottenersi da quelle del teor. III, moltiplicando ciascuna $v^{ih}(x, y)$ per un'arbitraria funzione $\varphi^h(x)$, dipendente soltanto dal punto x , continua, in A , con la derivata $\varphi_{x_a}^h(x)$, identicamente nulla su $\mathcal{F}A$.

V. Se l'integrale $I_v(y)$ è del primo ordine, e l'insieme $E^{(v)}$, con $v \geq 2$, è di Dirichlet, è funzione d'invarianza una qualsivoglia combinazione lineare a coefficienti costanti di determinanti minori della motrice p e quindi la somma della funzione data dalla (1.7) con una tale combinazione.

VI. Nel caso in cui l'integrale $I_v(y)$ è bidimensionale, del secondo ordine e y è uno scalare, opereremo nei simboli adottati, per $r = 2$, $n = 1$, $\mu = 2$, la sostituzione di Monge:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & p & q & r & s & t \\ x_1 & x_2 & y & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \end{pmatrix}.$$

Se l'insieme $E^{(v)}$ è di Dirichlet, supposto $v \geq 4$, è funzione di invarianza quella definita dall'identità:

$$\begin{aligned} (1.8) \quad & v(x, y, z, p, q, r, s, t) \equiv \\ & \chi \cdot (rt - s^2) + \varphi^{11}rp + \varphi^{12}rq + \varphi^{13}rz \\ & + \varphi^{21}sp + \varphi^{22}sq + \varphi^{23}sz \\ & + \varphi^{31}tp + \varphi^{32}tq + \varphi^{33}tz \\ & + (\chi_{yz} + \varphi_x^{11} + \varphi_y^{31} - \varphi_y^{12} + 2\varphi^{13}) \frac{p^2}{2} \\ & + (\chi_{x^2} + \varphi_y^{32} + \varphi_x^{22} - \varphi_x^{31} + 2\varphi^{33}) \frac{q^2}{2} \\ & + (-\chi_{xy} + \varphi_x^{12} + \varphi_y^{21} + \varphi^{23})pq \\ & + \psi^1pz + \psi^2qz + (\psi_x^1 + \psi_y^2 - \varphi_{x^2}^{13} - \varphi_{xy}^{23} - \varphi_{y^2}^{33}) \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

ove le dodici funzioni, delle variabili x e y ,

$$\begin{aligned} &\chi(x, y), \varphi^{11}(x, y), \varphi^{12}(x, y), \varphi^{13}(x, y), \\ &\varphi^{21}(x, y), \varphi^{22}(x, y), \varphi^{23}(x, y), \\ &\varphi^{31}(x, y), \varphi^{32}(x, y), \varphi^{33}(x, y), \psi^1(x, y), \psi^2(x, y), \end{aligned}$$

sono arbitrarie, in A di classe tre la χ , di classe due le φ^{ih} e di classe uno le ψ^i .

VII. Nel caso del teor. prec. se l'insieme $E^{(v)}$, con $v \geq 4$, è un qualsivoglia insieme convesso, la funzione definita dalla (1.8) è d'invarianza, se

la funzione χ è identicamente nulla su FA , con tutte le sue derivate parziali dei primi tre ordini;

le funzioni φ^{ih} sono identicamente nulle su FA con tutte le loro derivate parziali dei primi due ordini;

le funzioni ψ^i lo sono con tutte le loro derivate parziali del primo ordine.

Per l'integrale $I_v(y)$, supposto del primo ordine, $(n-1)(r-1) > 0$, $v \geq 2$, e l'insieme $E^{(v)}$ un particolare insieme convesso, che offre interesse per le applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità, sono in possesso della più generale funzione di invarianza, polinomio di secondo grado nella p_{ih} , a coefficienti dipendenti soltanto dal punto x .

Recentemente, il mio discepolo ungherese, Sig. ANDRAS KÒSA, ha comunicato all'Accademia dei Lincei una funzione d'invarianza, di notevole arbitrarietà, nel caso che l'integrale $I_v(y)$ sia unidimensionale, del second'ordine, y uno scalare e l'insieme $E^{(v)}$ di Dirichlet o affatto libero di condizioni.

2. — CRITERI SUFFICIENTI

PER PROBLEMI CON INSIEMI FUNZIONALI CONVESSI.

Le funzioni

$$\begin{aligned} &\Phi_{ihjk}(x, y, p), \Phi_{ihj}(x, y, p), \Phi_{ij}(x, y, p) \\ &[i, j = 1, 2, \dots, n; h, k = 1, 2, \dots, (\mu, r)], \end{aligned}$$

siano definite nell'insieme $B \times C$ dello spazio $XxYxP$, vi siano continue e verifichino le identità:

$$\Phi_{ihjk} \equiv \Phi_{jkih}, \quad \Phi_{ij} \equiv \Phi_{ji}.$$

Indicando anche con z un punto dello spazio Y e con q un punto dello spazio P , consideriamo, per ogni punto (x, y, p) di $B \times C$, la forma quadratica

$$(2.1) \quad \Phi(x, y, p, z, q)$$

nelle variabili reali $z_1, z_2, \dots, z_n, q_{11}, q_{12}, \dots, q_n, (\mu, r)$, definita dall'identità

$$(2.1) \quad \Phi(x, y, p, z, q) \equiv \sum_i^n ij \left[\sum_{h,k}^{(\mu, r)} \Phi_{ihjk}(x, y, p) q_{ih} q_{jk} \right. \\ \left. + z \sum_{h=1}^{(\mu, r)} \Phi_{ihj}(x, y, p) q_{ih} z_j + \Phi_{ij}(x, y, p) z_i z_j \right].$$

Sia H un insieme di vettori $\eta(x)$, a n componenti $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) funzioni di x , di classe μ in A , la forma quadratica (2.1) si dirà *integralmente semidefinita positiva* nell'insieme $E^{(v)} \times H$ se, per ogni vettore $[y(x), \eta(x)]$, di tale insieme, risulta

$$(2.2) \quad \int_A \Phi[x, y(x), Dy(x), \eta(x), D\eta(x)] dx \geq 0,$$

integralmente definita positiva se è integralmente semidefinita positiva e nella (2.2) vale l'eguaglianza, soltanto quando sia

$$\eta(x) \equiv 0, \quad \text{per } x \in A.$$

La forma quadratica (2.1) si dirà, in $B \times C$, *puntualmente semidefinita positiva* o *puntualmente definita positiva* se tale riesce per ogni punto (x, y, p) di $B \times C$. Si dirà, in $B \times C$, *puntualmente quasi ovunque definita positiva* se esiste, nello spazio X , un insieme A' , contenuto in A e avente la misura di A , tale che, detto B' l'insieme dei punti di B aventi in A' la loro posizione ortogonale sullo spazio X , la forma (2.1) risulta definita positiva comunque si assuma il punto (x, y, p) in

$B' \times C$. Si dirà, nell'insieme $E^{(v)}$, puntualmente quasi ovunque definita positiva, in A , se, comunque si assuma un vettore $y(x)$ di $E^{(v)}$, la forma quadratica, nelle variabili z_i e q_{ih} ,

$$\Phi(x, y(x), Dy(x), z, q)$$

risulta definita positiva in un insieme $A'[y(x)]$ di punti di A , avente la misura di A . Sussistono i teoremi seguenti.

VIII. Se la forma quadratica (2.1) è, nell'insieme $B \times C$, puntualmente quasi ovunque definita positiva, essa è, per qualsivoglia insieme $E^{(v)}$, puntualmente quasi ovunque definita positiva in A .

IX. Se la forma quadratica (2.1) è puntualmente semidefinita o definita positiva in $B \times C$, essa è integralmente semidefinita o definita positiva nell'insieme $E^{(v)} \times H$, quali si siano gli insiemi $E^{(v)}$ e H .

X. Se la forma quadratica (2.1) è, nell'insieme $E^{(v)}$, puntualmente quasi ovunque definita positiva in A , essa è integralmente definita positiva nell'insieme $E^{(v)} \times H$, per qualsivoglia insieme H .

XI. Se la forma quadratica (2.1) è, in $B \times C$, puntualmente semidefinita positiva e può essere, nell'insieme $E^{(v)} \times H$,

$$\Phi[x, y(x), Dy(x), \eta(x), D\eta(x)] \equiv 0, \quad \text{per } x \in A,$$

soltanto quando si abbia

$$\eta(x) \equiv 0, \quad \text{per } x \in A,$$

la forma stessa è integralmente definita positiva nell'insieme $E^{(v)} \times H$.

Introducendo, per la funzione $f(x, y, p)$, supposta di classe due in $B \times C$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih} , la relativa forma quadratica hessiana, rispetto alle dette variabili, dipendente dalle variabili z_i e q_{ih} , definita dall'identità

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f(x, y, p, z, q) &\equiv \sum_{ij}^n \left[\sum_{hk}^{(\mu, r)} f_{p_{ih} p_{jk}}(x, y, p) q_{ih} q_{jk} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{h=1}^{(\mu, r)} f_{y_i p_{ih}}(x, y, p) q_{ih} z_j + f_{y_i y_j}(x, y, p) z_i z_j \right], \end{aligned}$$

si possono enunciare i seguenti criteri sufficienti.

XII. L'insieme $E^{(v)}$ sia convesso e la funzione $f(x, y, p)$ di classe due, in $B \times C$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih} . Sia possibile definire una funzione $v(x, y, p)$, di invarianza per l'integrale $I_v(y)$ nell'insieme $E^{(v)}$, pur essa, in $B \times C$, di classe due, rispetto a quelle variabili, in modo che l'hessiana della funzione $f - v$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih} ,

$$(2.3) \quad \mathcal{H}_{f-v}(x, y, p, z, q) = \sum_{i,j}^n \left[\sum_{h,k}^{(\mu,r)} (f_{p_{ih}p_{jk}} - v_{p_{ih}p_{jk}}) q_{ih} q_{jk} \right. \\ \left. + z \sum_{h=1}^{(\mu,r)} (f_{y_i p_{ih}} - v_{y_i p_{ih}}) q_{ih} z_j + (f_{y_i y_j} - v_{y_i y_j}) z_i z_j \right],$$

risulti, nell'insieme $E^{(v)} \times H$, ove H è la totalità dei vettori $\eta(x)$, di classe v in A , integralmente semidefinita positiva (negativa). In tale ipotesi, una funzione $\hat{y}(x)$ di $E^{(v)}$, tale che, per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$, si abbia

$$\int_A \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{f}_{y_i} \cdot [y_i(x) - \hat{y}_i(x)] + \sum_{h=1}^{(\mu,r)} \hat{f}_{p_{ih}} \cdot \mathcal{D}_h[y_i(x) - \hat{y}_i(x)] \right\} dx \geq 0,$$

(condizione, questa, necessaria per il minimo) minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$, e propriamente se ha luogo la integrale definitezza positiva in $E^{(v)} \times H$ della detta forma (2.3).

XIII. Nelle ipotesi del teor. prec., se la funzione $\hat{y}(x)$ è un'estremale e sulla frontiera di A è tale da risaltare, per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(v)}$,

$$\int_{\partial A} \sum_{i=1}^n \sum_{\mu_h \leq \mu-1} \hat{g}_{ih}(x) \mathcal{D}_h(y_i - \hat{y}_i) d\sigma \geq 0,$$

(condizioni, queste, necessarie per il minimo, se l'insieme $E^{(v)}$ è libero di condizioni nell'interno di A e inoltre, per x interno ad A , il punto $[x, \hat{y}(x)]$ è sempre interno a B) essa minimizza $I_f(y)$ in $E^{(v)}$ e propriamente se si ha la integrale definitezza positiva, in $E^{(v)} \times H$, della forma (2.3), H essendo la totalità di vettori $\eta(x)$, di classe v in A .

Interessa osservare che i teoremi XII e XIII continuano a valere, in taluni casi, sostituendovi all'insieme H uno più ristretto. Sussiste, per esempio, il teorema seguente.

XIV. *Se l'insieme $E^{(\nu)}$ è la totalità delle funzioni, di classe ν in A , per le quali il punto $[x, y(x), Dy(x)]$ è in $B \times C$, verificanti le condizioni*

$$J_s[y(x)] = \bar{y}_s(x) \quad (s = 1, 2, \dots)$$

ora gli J_s , designano assegnati operatori distributivi e $\bar{y}_s(x)$ altrettante assegnate funzioni di x , definite in A o su $\mathcal{F}A$, oppure, soltanto, su $\mathcal{F}A$, in particolare, se l'insieme $E^{(\nu)}$ è di Dirichlet, valgono, nelle ipotesi poste, i teoremi XII e XIII, potendovi restringere l'insieme H in quello dei vettori $\eta(x)$ di classe ν in A , verificanti le condizioni

$$J_s[\eta(x)] = 0 \quad (s = 1, 2, \dots).$$

3. — TEOREMI DI UNICITÀ

PER LE SOLUZIONI DI TALUNE EQUAZIONI FUNZIONALI
E SEPARAZIONE DEGLI AUTOVALORI DI UN PARAMETRO
DA CUI QUELLE DIPENDANO.

Supposta la funzione $f(x, y, p)$ di classe due, in $B \times C$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih} , vogliamo considerare il seguente

Problema. *Siano: $E^{(\nu)}$ la totalità delle funzioni $y(x)$ di classe $\nu (\geq \mu)$ in A , per le quali il punto $[x, y(x), Dy(x)]$ è sempre in $B \times C$, $J_s (s = 1, 2, \dots)$ un certo numero di assegnati operatori distributivi, $\bar{y}_s(x) (s = 1, 2, \dots)$ altrettante funzioni di x , definite in A o su $\mathcal{F}A$, oppure, soltanto, su $\mathcal{F}A$. Ricercare una funzione $\hat{y}(x)$ dell'insieme $E^{(\nu)}$, che sia regolare rispetto alla funzione $f(x, y, p)$, per la quale si abbia, per ogni funzione $y(x)$ di $E^{(\nu)}$,*

$$(3.1) \quad \int_{\mathcal{F}A} \sum_{i=1}^n \sum_{\mu_h \leq \mu-1} \hat{g}_{ih}(x) D_h(y_i - \hat{y}_i) d\sigma = 0,$$

e soddisfi le equazioni:

$$(3.2) \quad \mathcal{E}_i^f(\hat{y}) = 0, \quad \text{per } x \in A; \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(3.3) \quad J_s[\hat{y}(x)] = \bar{y}_s(x) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Per tale problema sussiste il seguente teorema di unicità.

XV. Detto $E^{(v)}$ l'insieme delle funzioni di $E'^{(v)}$ verificanti le (3.3), se esiste una funzione $v(x, y, p)$ di invarianza dell'integrale $I_v(y)$ in $E^{(v)}$, pur essa, in $B \times C$, di classe due rispetto alle variabili y_i e p_{ih} , per la quale l'hessiana $\mathcal{H}_{f-v}(x, y, p, z, q)$, risulti, nell'insieme $E^{(v)} \times H$, essendo H la totalità dei vettori $\eta(x)$ di classe v in A , verificanti le equazioni

$$J_s[\eta(x)] = 0 \quad (s = 1, 2, \dots)$$

integralmente definita (positiva o negativa) il posto problema non può posseder più di una soluzione.

Dimostrazione. — L'insieme $E^{(v)}$ è convesso, e, a norma del teorema XIII, una soluzione $\hat{y}(x)$ del problema minimizza o massimizza, secondochè $\mathcal{H}_{f-v}$ è positiva o negativa, propriamente, l'integrale $I_f(y)$ nell'insieme $E^{(v)}$ e pertanto essa è unica.

Caso particolare del Teorema ora dimostrato è il seguente.

XVI. Assegnata una funzione $\bar{y}(x)$, di classe μ in A , per la quale il punto $[x, \bar{y}(x), \mathcal{D}\bar{y}(x)]$ è sempre in $B \times C$, non può esistere più di una funzione $\hat{y}(x)$ dell'insieme $E'^{(v)}$ delle funzioni di classe v ($\geq \mu$) in A , per le quali il punto $[x, y(x), \mathcal{D}y(x)]$ è sempre in $B \times C$, che sia regolare rispetto alla funzione $f(x, y, p)$ e soddisfi le equazioni

$$(3.2) \quad \mathcal{E}_i^f(\hat{y}) = 0, \quad \text{per } x \in A; \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} \hat{y}(x) = \bar{y}(x), \\ \mathcal{D}_h \hat{y}(x) = \mathcal{D}_h \bar{y}(x), \end{cases} \quad \text{per } x \in \mathcal{F}A \text{ e } \mu_h \leq \mu - 1,$$

se si possiede una funzione $v(x, y, p)$, pur essa, in $B \times C$, di classe due rispetto alle variabili y_i e p_{ih} , d'invarianza per l'integrale

grale $I_v(y)$ nell'insieme di Dirichlet $E^{(v)}$ delle funzioni di $E'^{(v)}$ verificanti le (3.4), per la quale l'hessiana $\mathcal{H}_{f-v}$ risalta integralmente definita (positiva o negativa) nell'insieme $E^{(v)} \times H$, essendo H la totalità delle funzioni $\eta(x)$ di classe v in A , verificanti le equazioni

$$\begin{cases} \eta(x) = 0, \\ \mathcal{D}_h \eta(x) = 0, \end{cases} \quad \text{per } x \in \mathcal{F}A \text{ e } \mu_h \leq \mu - 1.$$

Rappresenti ora λ un punto di un fissato spazio euclideo A , ad un qualsivoglia numero di dimensioni, e supponiamo che dipendano dal punto λ , assunto come parametro, i domini A e B , il campo C , gli operatori J_s e le funzioni $\bar{y}_s$ e f , ciò che sarà messo in vista rappresentando quegli elementi, rispettivamente coi simboli

$$A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), J_s(\lambda), \bar{y}_s(x, \lambda), f(x, y, p, \lambda),$$

di funzioni, che supporremo definite, le prime quattro, nello spazio A , le quinte nell'insieme $A(\lambda) \times A$ e l'ultima nell'insieme $B(\lambda) \times C(\lambda) \times A$.

Dico che, fissato un punto $\bar{\lambda}$, esso è un *autovalore* di λ per il problema considerato, oppure per il sistema di equazioni (3.1), (3.2), (3.3), se, per quel fissato punto $\bar{\lambda}$ non sussiste il teorema di unità dell'eventuale soluzione.

Per il calcolo degli autovalori di λ , come per quello delle soluzioni di equazioni ordinarie, può essere utile il possesso di teoremi che ne consentano la *separazione*, cioè di teoremi che valgano a caratterizzare insiemi L dello spazio A sprovvisti di autovalori. Il Teorema XV, fornisce, in proposito, il seguente, nel cui enunciato, per mettere in vista la dipendenza delle funzioni f e v dal parametro λ , vengono, queste, rispettivamente, indicate coi simboli $f(\lambda)$ e $v(\lambda)$.

XVII. Indichi $E^{(v)}(\lambda)$ l'insieme $E^{(v)}$, considerato nel teorema XV. L'insieme L di punti dello spazio A è privo di autovalori, se esiste una funzione $v(\lambda)$, d'invarianza per l'integrale $I_v(\lambda)$ nell'insieme $E^{(v)}(\lambda)$, pur essa, in $B(\lambda) \times C(\lambda)$, di classe due

rispetto alle variabili y_i e p_{ih} , tale che, mantenendo il punto λ in L , l'hessiana

$$\mathcal{H}_{f(\lambda)-v(\lambda)}(x, y, p, z, q),$$

si mantenga, nell'insieme $E^{(v)}(\lambda) \times H(\lambda)$ integralmente definita (positiva o negativa), essendo $H(\lambda)$ la totalità dei vettori $\eta(x, \lambda)$, funzioni di x , di classe v in $A(\lambda)$, verificanti le equazioni:

$$J_s[\lambda, \eta(x, \lambda)] = 0, \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Immediata conseguenza di questo teorema è una notevole generalizzazione del classico teorema di RITZ, fornita dal seguente.

XVIII. Sia A l'asse reale e non dipendano da λ gl'insiemi B e C , nè gli operatori J_s , e quindi neppure l'insieme $E^{(v)}$. Supponiamo che, per la funzione $v(\lambda)$, dipendente dal parametro λ , di invarianza per l'integrale $I_{v(\lambda)}(y)$ in $E^{(v)}$, si abbia:

$$H_{f(\lambda)-v(\lambda)}(x, y, p, z, q) \equiv$$

$$\Phi_v(x, y, p, z, q) - \lambda \Psi_v(x, y, p, z, q),$$

essendo Φ_v e Ψ_v due forme quadratiche, nelle variabili z_i e q_{ih} , con coefficienti funzioni del punto (x, y, p) , continue in $B \times C$, la seconda conservandosi integralmente definita, positiva o negativa, nell'insieme $E^{(v)} \times H$, ove H è la totalità dei vettori $\eta(x)$, funzioni di x non identicamente nulle, di classe v in A , verificanti le equazioni

$$J_s[\eta(x)] = 0, \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Detti λ'_v e λ''_v gli estremi inferiore e superiore del funzionale

$$\frac{\int_A \Phi_v[x, y(x), Dy(x), \eta(x), D\eta(x)] dx}{\int_A \Psi_v[x, y(x), Dy(x), \eta(x), D\eta(x)] dx},$$

nell'insieme $E^{(v)} \times H$, l'intervallo $(-\infty, \lambda'_v)$, se $\lambda'_v > -\infty$ e l'intervallo $(\lambda''_v, +\infty)$, se $\lambda''_v < +\infty$, sono privi di autovalori.

Il calcolo delle variazioni e la semicontinuità.

Riassunto. — *Si tratta di una relazione avente come oggetto il Calcolo delle variazioni, e nella quale viene dato uno sguardo al metodo diretto dovuto a L. Tonelli e seguito dalla sua scuola, con riferimento ad alcuni aspetti della teoria relativa agli integrali curvilinei in forma ordinaria e in forma parametrica, anche nel caso in cui l'integrale dipende da elementi differenziali di ordine superiore.*

1. — Nella parte storica dell'introduzione a un volume di Calcolo delle variazioni pubblicato un anno fa ⁽¹⁾ l'A. cita, tra i più noti variazionisti, L. Tonelli e la sua scuola, i quali hanno indagato l'effetto che ha l'ampliamento della classe di curve ammissibili, l'integrazione essendo intesa nel senso di Lebesgue. Ringraziando l'autore della citazione fatta, soggiungo che tale riferimento conduce spontaneamente a quanto mi accingo a esporre; vale a dire, a mio modesto parere, due altri aspetti della trattazione di Tonelli sono da ricordare: aver costruito una teoria veramente nuova, considerando il Calcolo delle variazioni come un capitolo del Calcolo funzionale, e aver posto a base di tale teoria il concetto di semicontinuità.

⁽¹⁾ L. A. PARS, *An Introduction to the Calculus of Variations*, « Heinamm », London Melbourne Toronto, 1962, pp. XII-350. A pag. 18 si legge: Among the prominent names in the most recent period are Hilbert, Bolza, Bliss, Tonelli, Marston Morse ... Tonelli and his school investigated the effects of widening the class k of admissible functions, from the class D_1 to the class of absolutely continuous functions, the integrals being interpreted as Lebesgue integrals.

2. — A quella data (le prime ricerche di Tonelli sono del 1911) il Calcolo funzionale era sorto da non molti anni ad opera di V. Volterra e di S. Pincherle, ma io desidero ritornare più indietro. Non intendo nè risalire ai problemi della geometria greca, nè citare le questioni studiate dai fratelli Bernoulli, ai quali, come è ben noto, risalgono le origini del Calcolo delle variazioni; mi soffermo sul contributo arrecato da L. Lagrange, perchè la « variazione » cioè il passaggio da una curva $y = y_0(x)$ a una curva variata $y = y(x)$ costituisce un primo elemento del Calcolo funzionale. A tal riguardo è bene ricordare che Lagrange ha considerato la variazione sotto due diversi aspetti. Una particolare variazione, ben nota anche a chi conosce soltanto gli elementi della teoria classica, perchè di tale caso particolare viene fatto uso per stabilire la prima condizione necessaria, è ottenuta, considerando la curva, che fornisce l'estremo, come appartenente a una famiglia di curve dipendenti da un parametro: mediante tale artificio la determinazione dell'equazione differenziale di Euler si riduce a un problema di estremo del Calcolo differenziale.

Ma la variazione si realizza in tutta la sua generalità, dando alla funzione $y_0(x)$ un incremento del tutto arbitrario δy_0 : questo rilievo ha la massima importanza concettuale, ma forse qualcuno di coloro che mi ascoltano potrebbe sorridere, pensando che questa mia affermazione sia puramente occasionale; voglio pertanto ricordare che nel 1939 Tonelli ([2] ⁽²⁾, pp. 428-429), riferendosi a Lagrange scriveva: « col suo concetto generale di variazione, è venuto egli stesso a porsi senz'altro sul piano dell'Analisi funzionale ». L'insegnante della R. Scuola di artiglieria del regno di Sardegna emerge quale precursore di quel metodo diretto, che è sorto alla distanza di circa un secolo e mezzo dalle comunicazioni, che egli tenne in questa Reale Accademia delle Scienze.

(²) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia, nella quale sono state elencate soltanto le più recenti pubblicazioni citate nel testo, perchè in esse figurano le citazioni bibliografiche relative ai precedenti lavori, cui fa riferimento la presente relazione.

3. — In analogia a quanto si fa nel Calcolo differenziale Lagrange ha decomposto la variazione totale di un integrale I nelle diverse parti infinitesimali, chiamate: variazione prima, variazione seconda, ecc., e indicate con le notazioni δI , $\delta^2 I$, ...; e inoltre ha posto le basi di un metodo generale per la trattazione dei problemi variazionali che, per quanto è possibile, si presenta come naturale estensione del procedimento, mediante il quale nel Calcolo differenziale si cercano i massimi e i minimi. Pertanto il Figlio di questa città sabauda è considerato il vero fondatore del Calcolo delle variazioni, perchè i successivi sviluppi del citato metodo hanno portato a quella teoria classica, che, come è già stato accennato, ha come base la teoria delle equazioni differenziali, e nella quale emergono le quattro condizioni di Euler, Legendre, Jacobi, Weierstrass.

È superfluo che io mi indugi a ricordare in qual modo, verso la fine del secolo passato, le difficoltà, che si incontrano nella risoluzione di equazioni differenziali, il fatto che ben noti problemi del Calcolo delle variazioni non avessero trovato soluzione mediante i metodi classici e la necessità di conseguire risultati generali anche nella ricerca degli estremi assoluti abbiano fatto sentire l'esigenza di nuovi metodi, e che d'altra parte il sorgere dell'Analisi funzionale abbia offerto nuove vie da seguire.

4. — Il tentativo di C. Arzelà per risolvere il problema di Dirichlet assieme al successo conseguito qualche anno dopo da D. Hilbert, e l'affermazione di J. Hadamard (essere il Calcolo delle variazioni niente altro che il primo capitolo del Calcolo funzionale) sono i presupposti che hanno indotto Tonelli a costruire la nuova teoria. È ben noto quanto hanno scritto nel 1936 V. Volterra e J. Pérès: Tonelli è «le véritable fondateur des méthodes nouvelles», ma è bene riaffermare, in occasione di questo Simposio internazionale, e senza aggiungere altre parole, che al Discepolo dell'Arzelà va pienamente riconosciuto il merito di aver intuito la ragione fondamentale del citato successo, la quale è costituita dalla semicontinuità, di cui gode

l'integrale che si deve render minimo, per giungere alla risoluzione del problema di Dirichlet.

D'altra parte la lunghezza di una curva rettificabile e l'area, secondo Lebesgue, di una superficie curva non sono funzionali continui, ma godono della semicontinuità inferiore: infatti, per quanto due curve siano vicinissime, le loro lunghezze possono differire per un numero prefissato arbitrariamente grande; però, considerata una curva, un'altra curva ad essa sufficientemente prossima non può avere lunghezza minore della differenza tra la lunghezza della curva considerata e un numero positivo scelto ad arbitrio. Questi semplici esempi pongono in luce che la semicontinuità, la quale nella teoria delle funzioni di variabile reale ha intenti essenzialmente critici, nel Calcolo funzionale si presenta in modo del tutto spontaneo e indispensabile; e non meno importante, assieme al concetto introdotto da R. Baire, è l'osservazione che i ragionamenti svolti nella teoria delle funzioni di variabile reale per stabilire, sotto l'ipotesi della continuità, l'esistenza del minimo e del massimo sono validi anche quando, rispettivamente, sussiste soltanto o la semicontinuità inferiore o quella superiore.

5. — Come è noto, affinchè il più semplice integrale del Calcolo delle variazioni

$$\int_C f(x, y(x), y'(x)) dx$$

sia continuo, è necessario che la funzione $f(x, y, y')$ sia lineare rispetto alla variabile y' . D'altra parte, a quella data, venne subito rilevato che della semicontinuità godono quegli integrali, che, secondo Hilbert, sono regolari.

Per individuare altre classi di funzionali semicontinui, Tonelli ha introdotto una terminologia ben nota: integrale quasi-regolare, integrale quasi-regolare seminormale, integrale quasi-regolare normale, sulla quale desidero soffermarmi. Queste denominazioni (e, sia detto tra parentesi, ancor più l'uso e l'abuso di notazioni convenzionali, che si va diffondendo

nella matematica) danno luogo a una pregiudiziale di carattere generale: l'autore, che introduce la terminologia o l'abbreviazione, ha profondamente meditato il concetto, giungendo alla sua formulazione definitiva dopo aver selezionato gli elementi principali che andavano tenuti presenti da quelli secondari o contingenti che erano da scartare, e in condizioni non molto diverse si trova lo studioso, che ha avuto lunga consuetudine con il concetto stesso, cosicchè entrambi sono naturalmente portati a usare la terminologia, quasi allo stesso modo, in cui oggi noi tutti diciamo « derivata », anzichè « funzione derivata ». In altre parole, ogni studioso ha, per ciascuno degli argomenti che coltiva, le relative pagine del dizionario e i rispettivi segni convenzionali, ma, quando prende contatto con altri ordini di studio, si trova dinnanzi ad altre pagine del vocabolario, nelle quali figurano non pochi omonimi; d'altra parte vi sono anche i sinonimi.

Per fissare le idee, consideriamo, per il momento, i seguenti integrali del Calcolo delle variazioni e le rispettive figurative

$$(I) \quad I_C = \int_C f(x, y, y') dx, \quad U = f(x, y, y'),$$

$$(II) \quad I_D[z] = \iint_D f(x, y, z, p, q) dx dy, \quad U = f(x, y, z, p, q),$$

$$(III) \quad \mathfrak{I}_C = \int_C F(x, y; x', y') ds, \quad U = F(x, y; x', y'),$$

$$(IV) \quad \mathfrak{I}_C = \int_C F(x, y, z; x', y', z') ds, \quad U = F(x, y, z; x', y', z'),$$

$$(V) \quad \mathfrak{I}_C^{[2]} = \int_C F\left(x, y, z; x', y', z'; \frac{v}{R}, \frac{\lambda}{R}, \frac{\mu}{R}\right) ds,$$

$$U = F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2),$$

ove $\tau : R$ è la flessione e λ, μ, ν sono i coseni direttori della binormale. Tenuta presente la positiva omogeneità di grado 1 della funzione F rispetto al complesso delle variabili x', y', z' , tali

figurative si trovano in condizioni diverse, essendo rispettivamente una curva piana, una superficie, una superficie conica, un'ipersuperficie conica, un'ipersuperficie.

Per ciascuno dei citati integrali i rispettivi concetti, sui quali, come ho detto, intendo soffermarmi, si possono formulare in diverse condizioni.

Nel caso dell'integrale (I) Tonelli ha fatto appello, inizialmente, alla derivata parziale seconda $f_{y'y'}(x, y, y')$; successivamente (1934) ha formulato le stesse definizioni nell'ipotesi che esista e sia continua soltanto la derivata parziale prima $f_{y'}(x, y, y')$, soggiungendo che i concetti stessi possono essere introdotti anche indipendentemente dall'esistenza di questa ultima derivata, perchè il fatto essenziale è la concavità della figurativa. A tal riguardo non è inutile aggiungere qualche dettaglio: una curva concava o può ridursi a una retta, oppure può contenere segmenti rettilinei (o anche due semirette) senza ridursi a una retta, o, finalmente, non contiene alcun segmento rettilineo.

Soggiungo che sembra utile supporre l'esistenza e la continuità della citata derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$, cosicchè si può definire la ben nota funzione $\xi(x, y; y', \tilde{y}')$ di Weierstrass, il cui significato geometrico è molto efficace per formulare i concetti in questione.

A conferma di quanto ho detto ora, per l'integrale (II), dopo alcuni indispensabili preliminari dati da Tonelli attraverso alla considerazione delle derivate parziali seconde f_{pp} , f_{pq} , f_{qq} , un'organica classificazione è stata fatta da L. Giuliano (1941) mediante la funzione $\xi(x, y, z; p, q; \tilde{p}, \tilde{q})$ di Weierstrass.

Nello studio dell'integrale (III) interviene la funzione $F_I(x, y; x', y')$, la quale, come è ben noto, è definita dalla identità

$$F_I = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = - \frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

e d'altra parte, attraverso alla formula di Schwarz, emerge la relazione, che intercede tra la F_I e la $\xi(x, y; x', y'; \tilde{x}', \tilde{y}')$.

Alquanto più complicata è la definizione della funzione $F_I(x, y, z; x', y', z')$ relativa all'integrale (IV)

$$\begin{aligned} F_I(x, y, z; x', y', z') &= \frac{1}{z'^2} \left| \frac{F_{x'x'} F_{x'y'}}{F_{y'x'} F_{y'y'}} \right| \equiv \frac{1}{x'^2} \left| \frac{F_{y'y'} F_{y'z'}}{F_{z'y'} F_{z'z'}} \right| \equiv \\ &\equiv \frac{1}{y'^2} \left| \frac{F_{z'z'} F_{z'x'}}{F_{x'z'} F_{x'x'}} \right| \equiv - \frac{1}{x'y'} \left| \frac{F_{z'z'} F_{z'x'}}{F_{z'y'} F_{x'y'}} \right| \equiv \\ &\equiv - \frac{1}{y'z'} \left| \frac{F_{x'x'} F_{x'y'}}{F_{x'z'} F_{y'z'}} \right| \equiv - \frac{1}{z'x'} \left| \frac{F_{y'y'} F_{y'z'}}{F_{y'x'} F_{z'x'}} \right|, \end{aligned}$$

e si deve soggiungere che nella formulazione dei concetti in questione, alcuni dei quali si presentano sotto forma molto complicata, intervengono, assieme alla funzione F_I , anche le derivate parziali seconde pure $F_{x'x'}$, $F_{y'y'}$, $F_{z'z'}$. Pertanto è di gran lunga preferibile far appello alla funzione $\mathfrak{E}(x, y, z; x', y', z'; \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ di Weierstrass. Tutto ciò risulta da una profonda e delicata analisi compiuta da N. Berruti Onesti [6], la quale, usufruendo della funzione $Q(x, y, z; x', y', z'; \xi, \eta, \zeta)$ di Mason e Bliss, è riuscita a stabilire la relazione, che intercede tra le funzioni $\mathfrak{E}$ di Weierstrass e F_I dello spazio.

Tra gli integrali presi in considerazione rimane il (V), per il quale i concetti in questione sono stati introdotti da S. Cinquini [7], mediante la funzione $\mathfrak{E}(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; \tilde{u}_2, \tilde{v}_2, \tilde{w}_2)$ di Weierstrass.

Per esaurire l'ordine di idee in questione voglio soggiungere un'osservazione, che sorge dal confronto tra gli integrali (I), (II), (V), nei quali, come ho già detto, la figurativa è rispettivamente una curva piana, una superficie, un'ipersuperficie di S_4 : tale osservazione, che è fondamentale per stabilire la semicontinuità, si riferisce al concetto di integrale quasi-regolare seminormale: mentre per l'integrale (I) la definizione di Tonelli equivale al fatto geometrico, che in nessun punto (x, y) la figurativa si riduce a una retta, nei riguardi dell'integrale (II) Giuliano ha rilevato che la figurativa non contiene alcuna retta. Come stanno le cose nel caso della figurativa relativa all'integrale (V)? Cinquini [6] ha posto in luce che, qualunque

sia il numero finito delle dimensioni dello spazio, nel quale è contenuta la (ipersuperficie) figurativa, nel caso in questione di un integrale quasi-regolare seminormale, tale figurativa non contiene alcuna retta. Questa osservazione che, come ho detto, è essenziale per giungere alla semicontinuità degli integrali quasi-regolari seminormali, riconferma l'importanza della funzione δ di Weierstrass, mediante la quale, qualunque sia il tipo di problema variazionale, che si considera, lo studioso è orientato a prefissare i concetti in questione in modo ben appropriato per i successivi sviluppi della teoria.

6. — Allo stesso modo, in cui lo studio delle proprietà delle funzioni continue precede il Calcolo differenziale, da quanto ho ricordato emerge come la necessaria premessa al Calcolo delle variazioni sia la teoria della semicontinuità dei relativi integrali.

A tal riguardo è da ricordare che, mentre nella teoria classica era già stato rilevato il significato delle condizioni necessarie di Euler e di Jacobi, vale a dire l'annullarsi della variazione prima e l'invarianza del segno della variazione seconda, il metodo diretto ha posto in luce che le condizioni di Legendre e di Weierstrass sono l'immediata conseguenza della semicontinuità, di cui gode l'integrale sopra una curva estremante.

7. — In quanto è stato finora esposto, è stato rinviato un preliminare fondamentale, cosicchè chi mi ascolta sente più viva una delle maggiori esigenze della matematica del secolo ventesimo, vale a dire: in quale campo funzionale viene considerato il problema di Calcolo delle variazioni? Per rispondere in modo pertinente, occorre esaminare singolarmente i diversi tipi di problemi variazionali.

Per i ben noti integrali (I) e (III) Tonelli si è proposto di stabilire risultati generali anche nella ricerca degli estremi assoluti, tenendo presente che alcuni problemi variazionali avevano fatto sentire la necessità di considerare un campo funzionale più ampio di quello, nel quale si era sviluppato il metodo

classico; inoltre le classi di curve, prese in considerazione da Tonelli e chiamate classi complete, sono di natura molto generale.

Pertanto per l'integrale (I) il campo funzionale è costituito dalle funzioni $y = y(x)$, ($a \leq x \leq b$) assolutamente continue e tali che esista finito l'integrale stesso: dove, qui e nel seguito, l'integrazione va intesa nel senso di Lebesgue ⁽³⁾.

L'integrale (III) è l'integrale in forma parametrica, che io ho presentato, assumendo, senz'altro, come parametro la lunghezza s dell'arco rettificato. A priori, geometricamente, è ben nota la maggior generalità, che presenta la classe delle curve in forma parametrica in confronto a quelle rappresentabili anche sotto forma ordinaria; d'altra parte, secondo la mia modesta opinione, il parametro è un elemento del tutto artificioso. Nella teoria, di cui sto parlando, si considerano curve rettificabili, e allora si ha il bene di poter scegliere come parametro quella lunghezza dell'arco rettificato, che ci ha concesso la Provvidenza e che è preziosissima, sia perchè è un elemento intrinseco, sia perchè facilita lo studio del problema variazionale a motivo del fatto che le derivate prime rispetto all'arco rettificato delle funzioni $x = x(s)$, $y = y(s)$, ($0 \leq s \leq L$), da cui la curva è definita, sono in valore assoluto non superiori all'unità, e pertanto l'integrale (III) esiste finito, perchè la funzione integranda è sempre limitata. L'integrale sotto forma parametrica è più generale dell'integrale (I), e, a prescindere da altre difficoltà, il suo studio, come è ben noto, è reso più facile da quanto ho ora ricordato. Però, se è intuitivo che sussistono problemi variazionali, i quali ammettono soluzione soltanto quando vengono studiati sotto forma parametrica, è pure ben noto anche il viceversa, vale a dire l'eventualità di problemi, la cui

⁽³⁾ Devo far presente che, soltanto inizialmente, Tonelli aveva fatto appello all'integrale secondo Weierstrass, il quale successivamente si è rilevato ben utile per estendere il Calcolo delle variazioni agli spazi astratti; a tale concetto di integrale si collegano recenti ricerche di E. Baiada e di alcuni suoi collaboratori.

soluzione esiste quando sono posti nella forma ordinaria, ma non in quella parametrica: ciò a motivo del diverso campo funzionale, che viene considerato nei due casi.

Passiamo ora dal più semplice problema variazionale a quello, in cui la funzione integranda dipende da elementi differenziali dei primi n ordini.

Nel caso della forma ordinaria (Cinquini, 1936)

$$(VI) \quad I_C^{[n]} = \int_C f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx,$$

il campo funzionale è costituito dalle curve $y = y(x)$, ($a \leq x \leq b$), per le quali la funzione $y(x)$ è assolutamente continua insieme con le proprie derivate dei primi $n - 1$ ordini ed esiste finito l'integrale $I_C^{[n]}$.

Nella forma parametrica è essenziale innanzi tutto, che l'integrale risulti indipendentemente dal parametro.

Nel caso piano e per $n = 2$ Cinquini (1944), modificando lievemente una precedente impostazione di N. Bogoliouboff, ha considerato l'integrale sotto la forma

$$(VII) \quad J_C^{[2]} = \int_C F\left(x, y; x', y'; \frac{d\theta}{ds}\right) ds,$$

ove $\frac{d\theta}{ds}$ rappresenta la curvatura e si suppone che la funzione $F(x, y; x', y'; \theta')$ sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', y' . Il campo funzionale è costituito dalle curve definite da funzioni assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e per le quali l'integrale (VII) esiste finito. È ovvio che, a differenza dal caso $n = 1$, questa ultima condizione non è conseguenza delle altre; d'altra parte, siccome, in base alle ipotesi fatte, si tratta di curve rettificabili, si può sempre assumere come parametro la lunghezza s dell'arco rettificato.

In data più recente Cinquini [5] ha considerato gli integrali curvilinei dello spazio (in forma parametrica), per i quali occorre un'indagine preliminare, affinchè l'integrale,

pur mantenendo la massima generalità, sia indipendente dal parametro.

Nel caso $n = 2$ l'integrale è stato considerato sotto la forma (V), mentre per $n = 3$ è stata scelta la forma

$$(VIII) \quad \mathfrak{J}_C^{[3]} = \\ = \int_C F \left(x, y, z; x', y', z'; \frac{v}{R}, \frac{\lambda}{R}, \frac{\mu}{R}; \frac{d}{ds} \frac{v}{R}, \frac{d}{ds} \frac{\lambda}{R}, \frac{d}{ds} \frac{\mu}{R} \right) ds$$

ferma restando, in entrambi i casi, la già citata positiva omogeneità di grado 1 rispetto a x', y', z' . Alla scelta in questione si perviene attraverso l'integrazione di un sistema di equazioni a derivate parziali, la cui risoluzione, come è ben noto, presenta diverse alternative; in altre parole l'attenzione si è fermata sulla forma (VIII) dopo lunga meditazione, fatta con piena autonomia di pensiero e dopo aver ritenuto non altrettanto soddisfacente l'impostazione, che si poteva dedurre dalle considerazioni fatte da parte di altri variazionisti nel caso degli integrali curvilinei del piano.

Nello studio dell'integrale (V) [rispettivamente (VIII)] il campo funzionale è costituito dalle funzioni assolutamente continue con le loro derivate del primo ordine [rispettivamente dei primi due ordini] e per le quali l'integrale in questione esiste finito.

Prima di proseguire desidero richiamare l'attenzione sugli integrali (VII), (V) e (VIII).

Come ho già rilevato le rispettive funzioni integrande non sono limitate e quindi i citati integrali presentano quelle stesse difficoltà che, per $n = 1$, si incontrano nella forma ordinaria, ma non in quella parametrica.

Inoltre le espressioni

$$\frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{\lambda}{R}, \frac{\mu}{R}, \frac{v}{R}; \quad \frac{d}{ds} \frac{\lambda}{R}, \frac{d}{ds} \frac{\mu}{R}, \frac{d}{ds} \frac{v}{R},$$

nelle quali, rispettivamente, compaiono le derivate di ordine massimo, non sono funzionali additivi.

Infine l'integrale (V) si discosta da tutti gli altri qui considerati, perchè le derivate di ordine massimo compaiono in tre espressioni, che non sono derivate esatte (4).

Pertanto, in un certo senso, nello studio dell'integrale (V) emergono difficoltà diverse da quelle che presenta l'(VIII).

8. — Prima di proseguire non è inutile ricordare che si può considerare la semicontinuità di un integrale sia su un determinato elemento del campo funzionale, sia su qualunque elemento del campo stesso.

Ciò premesso, in ogni capitolo della matematica la perfezione è teoricamente raggiunta dalla determinazione di condizioni necessarie e sufficienti, ma d'altra parte è ben noto, come talvolta queste condizioni sono, praticamente, di scarsa efficacia, oppure la loro formulazione non è consentita dalla natura del problema.

Naturalmente, come risulterà dal prosieguo del mio dire, hanno la massima importanza le condizioni sufficienti. Talvolta non sussiste la semicontinuità dell'integrale, che si considera, in tutto il campo funzionale, ma soltanto in una conveniente sottoclasse; d'altra parte, mantenuto fisso il campo funzionale, per stabilire la semicontinuità, può essere utile alterare la funzione integranda, usufruendo del fatto che, quando la funzione integranda è lineare nelle espressioni che contengono le derivate di ordine massimo, l'integrale gode, per solito e sotto opportune ipotesi, della continuità.

In merito alla proprietà ora citata costituisce un'eccezione il comportamento dell'integrale (V), la cui continuità (bene inteso, quando la funzione integranda è lineare nelle tre espres-

(4) Come è noto, quando, bene inteso, il parametro è la lunghezza s dell'arco rettificato, è

$$\frac{v}{R} = x'y'' - x''y', \quad \frac{\lambda}{R} = y'z'' - y''z', \quad \frac{\mu}{R} = z'x'' - z''x';$$

$$\frac{d}{ds} \frac{v}{R} = x'y''' - x'''y', \quad \frac{d}{ds} \frac{\lambda}{R} = y'z''' - y'''z', \quad \frac{d}{ds} \frac{\mu}{R} = z'x''' - z'''x'.$$

sioni $\frac{\lambda}{R}, \frac{\mu}{R}, \frac{\nu}{R}$) è assicurata sotto la condizione che si consideri una classe di curve, per le quali l'integrale della flessione si mantiene inferiore a un numero fisso. Questa eccezione, che è stata posta in luce da qualche esempio, trae origine dal fatto già rilevato, che le espressioni $\frac{\lambda}{R}, \frac{\mu}{R}, \frac{\nu}{R}$ non sono derivate esatte.

È da soggiungere che il matematico non si accontenta della ricerca soltanto di condizioni sufficienti, e vuol indagare anche su quelle necessarie; e, a tal riguardo, sono ben note le serie difficoltà, che talvolta intervengono nella dimostrazione di condizioni necessarie per la semicontinuità di un integrale su un determinato elemento del campo funzionale. Inoltre, quando si manifesta un divario tra condizioni sufficienti e condizioni necessarie, il ricercatore, la cui mentalità per solito è dotata anche di esigenze artistiche, resta insoddisfatto, perchè nella teoria sussistono zone, che rimangono in ombra e che vengono illuminate soltanto da qualche esempio costruito con particolare acutezza; soltanto a questo punto l'indagine scientifica è completa.

9. — A quanto ho ora asserito, si collega una questione, a prima vista marginale al Calcolo delle variazioni, la quale costituisce uno degli ostacoli della ricerca variazionale.

Intendo riferirmi al fenomeno di Lavrentieff, così chiamato da Tonelli a motivo del matematico, che, per primo, ebbe a rilevarlo (1926), mediante un esempio relativo all'integrale (I).

Vale a dire: nei confronti di ciascuno degli integrali, che si considerano nel Calcolo delle variazioni, si presenta il problema di approssimare una curva mediante curve definite da funzioni continue assieme a tutte le derivate da cui dipende l'integrale considerato, in maniera che anche l'integrale, calcolato per le funzioni approssimanti, approssimi l'integrale considerato. In breve, la questione citata si risolverebbe immediatamente usufruendo di un teorema di integrazione per serie, ma ciò è

immediato soltanto nei riguardi degli integrali (III) e (IV) (tra quelli citati), perchè le funzioni integrande sono limitate.

Per ciascuno degli ulteriori integrali il problema non ammette soluzione, se non sotto opportune condizioni per la funzione integranda, e pertanto sono state date condizioni sufficienti, affinchè non si verifichi il fenomeno di Lavrentieff: particolarmente efficace è l'approssimazione mediante curve definite da medie integrali, come ha mostrato Cinquini (1933; 1935) e anche recentemente per gli integrali (VII), (V) e (VIII) (Cinquini, [8], [9]).

10. — Sono ormai all'apice del mio dire: si tratta di ricordare lo schema che si segue, per stabilire l'esistenza dell'estremo assoluto, per esempio, per fissare le idee, nel caso del minimo.

In primo luogo si suppone che tutte le espressioni, da cui dipende la funzione integranda, con eccezione di quelle in cui intervengono le derivate di ordine massimo, varino in un campo limitato. Inoltre si fa l'ipotesi che la funzione integranda sia inferiormente limitata. Allora nella classe di curve, nella quale si vuol stabilire l'esistenza del minimo assoluto, l'integrale ammette limite inferiore finito e si può estrarre dalla classe considerata una successione di curve minimizzante. È essenziale provare, che le funzioni, da cui tale successione è definita, sono ugualmente limitate e ugualmente continue, o meglio equiassolutamente continue. Allora i classici risultati di Analisi funzionale, dovuti a Giulio Ascoli e a C. Arzelà, consentono di estrarre dalla successione minimizzante una sottosuccessione, la quale converge verso una curva, per la quale è essenziale stabilire l'appartenenza alla classe considerata. A tal riguardo, usufruendo della cosiddetta semicontinuità all'infinito, si prova che tale curva rende finito l'integrale; è poi immediato, che essa appartiene alla classe, perchè questa, per ipotesi, è completa. Infine, utilizzando una condizione sufficiente per la semicontinuità, si conclude che tale curva realizza effettivamente il minimo assoluto.

Da quanto ho riferito, appare evidente che la semicontinuità dell'integrale da render minimo interviene soltanto nella conclusione finale, e pertanto può sorgere il dubbio che essa giochi un ruolo puramente marginale. Ma quando si costruisce un edificio, a che cosa servirebbero le fondamenta e i pilastri di cemento armato, se non fossero in grado di sostenere il peso del tetto, la cui importanza funzionale è ben nota? A questo punto l'edificio non è ancora completo.

Senza citare altri artifici, quale quello di E. J. Mc. Shane, il quale, nello studio dell'integrale in forma ordinaria, ha introdotto un integrale associato in forma parametrica, è da far presente la seguente idea, che risulta molto vantaggiosa. Talvolta il procedimento, riferito poco sopra, non è applicabile alla classe di curve considerata, ma esso diviene efficace nei riguardi di un'opportuna sottoclasse, estratta dall'intera classe e nella quale il limite inferiore dell'integrale da render minimo coincide con il limite inferiore nell'intera classe.

D'altra parte, inizialmente è stata formulata l'ipotesi che la funzione integranda sia inferiormente limitata; tale ipotesi richiede, per ciascuno dei tipi di integrali considerati, un'ulteriore indagine, sia per rilevare sotto quali condizioni può essere rimossa, sia per mostrare, mediante esempi, che essa, talvolta, è indispensabile per l'esistenza del minimo assoluto.

A questo punto è da soggiungere che, quando dallo studio dei più noti integrali (I) e (III), ai quali prevalentemente mi sono finora riferito, si passa a quelli, la cui funzione integranda dipende da elementi differenziali di ordine superiore al primo, emergono nuove difficoltà o almeno nuovi aspetti della questione, i quali esigono un'indagine appropriata, la quale, talvolta, dà luogo a considerazioni originali e interessanti.

Per l'integrale (VII) l'esistenza dell'estremo assoluto viene stabilita inizialmente per classi di curve aventi lunghezza inferiore a un numero fisso. Questa limitazione, che non può essere senz'altro soppressa, perchè qualche esempio mette in luce che il minimo viene a mancare, richiede un'ulteriore indagine

rivolta o ad attenuarla o a sostituirla con qualche ulteriore ipotesi relativa alla funzione integranda.

Nel caso dell'integrale (V) si richiede, inizialmente, un'analoga limitazione; e riesce particolarmente efficace un lemma di geometria infinitesimale (nonchè un suo complemento), il quale afferma che un insieme di curve dello spazio, contenute in un campo limitato, definite da funzioni assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e tali che l'integrale della flessione sia inferiore a un numero fisso, gode della proprietà che le loro lunghezze sono limitate.

Ciò premesso, occorre ritornare sulla ipotesi che nella funzione integranda si mantengano limitate quelle espressioni, nelle quali non compaiono le derivate di ordine massimo.

Innanzitutto, quando nei confronti degli integrali (I), (III), (IV) si abbandona tale condizione, si considera il problema dell'esistenza del minimo assoluto in un campo illimitato. Pertanto o per la funzione integranda o per la classe di curve considerata o per entrambe si formulano ipotesi, le quali, per così dire, impediscono che la curva minimante possa fuggire all'infinito.

Quanto ho ora rilevato si ripete anche a proposito degli integrali (VII) e (V), perchè il valore assoluto di ciascuna delle derivate $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ non supera l'unità.

Ben diversa è la situazione dell'integrale (VI), perchè l'ipotesi, fatta inizialmente, implicava che le derivate $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n-1)}(x)$ delle funzioni della classe considerata fossero ugualmente limitate, e ciò costituisce una forte limitazione, che è stata eliminata attraverso a un'appropriata indagine sviluppata da Cinquini e sulla quale è ritornato W. Transue [1], [2].

Infine richiamo l'attenzione sull'integrale (VIII), che si trova in condizioni diverse dal (V) e presenta maggiori analogie con il (VI): in tal modo è confermata l'opportunità di due distinte trattazioni per gli integrali (V) e (VIII) (5).

(5) È immediato che la teoria sviluppata per l'integrale (VIII) si estende immediatamente al caso di integrali dipendenti da elementi differenziali di ordine superiore al terzo.

Infatti lo studio dell'integrale (VIII) è stato sviluppato in modo un po' diverso, provando immediatamente l'esistenza del minimo assoluto in una classe di curve aventi lunghezza inferiore a un numero fisso, e le cui flessioni sono ugualmente limitate. Nè l'una nè l'altra di tali limitazioni si può senz'altro sopprimere, come mostrano esempi nei quali manca il minimo assoluto; pertanto è stata necessaria un'ulteriore indagine rivolta a sostituire a queste limitazioni altre condizioni, che hanno condotto a teoremi di più ampia portata.

11. — Non sembra inutile soggiungere qualche parola relativa al caso, in cui si vuol stabilire l'esistenza del minimo assoluto, quando l'integrale (I) o (VI) si riferisce a classi di curve definite su un intervallo infinito, perchè si tratta di un aspetto del problema variazionale, che richiede una propria indagine: tale questione, impostata da Cinquini (1940), è stata ampiamente sviluppata da S. Faedo, e su di essa sono ritornati G. Darbo [1] e Cinquini [11], [12]. A differenza da quanto può sembrare a prima vista, si tratta di una ricerca, che interessa non soltanto la curiosità dello studioso, perchè dei risultati di tale indagine Faedo ha fatto applicazione alla sistemazione teorica del metodo variazionale di M. Picone per l'integrazione numerica di equazioni a derivate parziali della Fisica matematica.

12. — Prima di concludere è necessario riordinare le idee. A differenza dal metodo classico, nel quale si inizia lo studio del problema variazionale mediante la considerazione delle estremali, vale a dire delle soluzioni dell'equazione di Euler, il metodo diretto, come emerge da quanto ho finora ricordato, perviene a stabilire l'esistenza dell'estremo assoluto senza far appello alle equazioni differenziali. Pertanto devo ancora soffermarmi sulle proprietà analitiche della curva estremante. Ma non è affatto vero che, in ogni caso, la curva minimante sia un'estremale: ciò è intuitivo, perchè le funzioni, che definiscono la curva minimante, possono non essere dotate di tutte

le derivate, che figurano nell'equazione differenziale di Euler. Pertanto, mediante la considerazione di equazioni integro-differenziali, Tonelli ha introdotto per gli integrali (III) e (I) il concetto di estremaloide, e anche, nel caso della forma ordinaria, quello di pseudoestremaloide. Ciò premesso, in primo luogo si ricercano condizioni sufficienti, affinché una curva minimante sia un'estremaloide (oppure una pseudoestremaloide), e successivamente occorrono criteri, perchè questa sia un'estremale.

L'estensione della teoria delle estremali, delle estremaloidi (nonchè delle pseudoestremaloidi) ai problemi di ordine superiore ha formato oggetto di un complesso di ricerche, ciascuna delle quali presenta le proprie caratteristiche.

La trattazione relativa agli integrali (VI) offre alcuni aspetti originali, perchè, più volte, intervengono ipotesi, le cui analoghe, per $n = 1$, sono superflue; ma ciò è dovuto alla natura più complicata del problema dell'esistenza dell'estremale per $n > 1$, come risulta da efficaci esempi, i quali mettono in luce, nei diversi casi, che, se si omette la rispettiva ipotesi supplementare, l'estremale non esiste.

Nei riguardi degli integrali (VII), (V) e (VIII) emerge, anche nell'indagine relativa alle estremaloidi, quella difficoltà che, come è già stato detto (n. 7), per $n = 1$ sussiste soltanto nella forma ordinaria; inoltre nuovi ostacoli traggono origine dal fatto che le espressioni, che contengono le derivate di ordine massimo, non sono funzionali additivi.

Per gli integrali (VII) alle ricerche di Bogoliouboff hanno fatto seguito quelle di Cinquini [1], [2], [3], il quale, avendo impostato il problema variazionale in forma un po' diversa (n. 7), è pervenuto a risultati più significativi e più ampi.

Nello studio degli integrali (V) e (VIII) un'ulteriore complicazione è costituita dal fatto che nella funzione integranda le espressioni contenenti le derivate di ordine massimo sono tre, e ciascuna di esse dipende da due di tali derivate di ordine massimo, oltrechè da derivate di ordine infe-

riore ⁽⁶⁾. Una profonda trattazione è stata sviluppata da N. Berruti Onesti [1], [2], [3], [4], [5], la quale ha posto in luce anche alcuni casi particolari, nei quali la teoria piuttosto complessa è suscettibile di alcune notevoli semplificazioni.

A questo punto il mio dire può ritenersi concluso: non bastava soffermarsi sulla semicontinuità e sullo schema che conduce a dimostrare l'esistenza dell'estremo assoluto; occorre ricordare la profonda differenza tra il metodo classico, nel quale il Calcolo delle variazioni usufruisce della teoria delle equazioni differenziali, e il metodo diretto mediante il quale, stabilita l'esistenza dell'estremo assoluto, attraverso all'esame delle proprietà analitiche delle curve estremanti si arrecano significativi contributi alla teoria delle equazioni differenziali, fornendo la soluzione di problemi ai limiti.

13. — Non mi sono addentrato nel capitolo degli integrali multipli, e non ho fatto riferimento ad altri problemi, quali quelli di Mayer e Lagrange, e nemmeno agli integrali di Fubini Tonelli, per evitare eventuali interferenze con le relazioni di alcuno dei colleghi, ma in questo simposio, che si svolge nella città del Politecnico subalpino, l'animo mio sente un vuoto incolmabile e il pensiero devoto si volge alla grande memoria di G. Fubini. Nel ventennale della di lui scomparsa ricordo che, 17 anni fa, alla mia accademia (l'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere) nel commemorare la dipartita di L. Tonelli, facendo riferimento al teorema di Fubini Tonelli sugli integrali multipli così mi sono espresso: «l'amicizia dei due grandi matematici è stata pari al loro valore».

⁽⁶⁾ Come è stato reso esplicito in ⁽⁴⁾.

BIBLIOGRAFIA (7)

- BERRUTI ONESTI N., [1] *Sopra le estremali relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, « Annali di Matematica pura e applicata », vol. LII (1960), pp. 79-106.
- [2] *Sopra le estremaloidi relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, « Annali di Matematica pura e applicata », vol. LII (1960), pp. 219-246.
- [3] *Sopra alcune proprietà delle estremaloidi relative ad una classe di problemi variazionali*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. XV (1961), pp. 327-335.
- [4] *A proposito delle estremali relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, « Boll. Unione Matematica Italiana », vol. 16 (1961), pp. 465-475.
- [5] *Sopra una questione di Calcolo delle variazioni relativa ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, « Celebrazioni archimedee del secolo XX », Siracusa, 11-16 aprile 1961, vol. II, pp. 73-74.
- [6] *A proposito di una classificazione di integrali curvilinei dello spazio nel calcolo delle variazioni*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », T. X (1961), pp. 233-261.
- CINQUINI S., [1] *Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali*, « Rend. Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXIII (1957), pp. 22-28.
- [2] *Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali*, « Rend. Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXIII (1957), pp. 116-120.
- [3] *Sopra un teorema relativo alle estremali di una classe di problemi variazionali*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. XI (1957), pp. 137-147.
- [4] *Un'osservazione sopra le estremaloidi dei problemi variazionali di ordine n* , « Boll. Unione Matematica Italiana », vol. 12 (1957), pp. 385-393.
- [5] *Sopra i fondamenti di una classe di problemi variazionali dello spazio*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », T. VI (1957), pp. 271-288.
- [6] *Un'osservazione sopra la figurativa degli integrali quasi-regolari seminormali*, « Boll. Unione Matematica Italiana », vol. 14 (1959), pp. 321-326.
- [7] *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica*, « Annali di Matematica pura e applicata », vol. XLIX (1960), pp. 25-72.

(7) Cfr. quanto è stato fatto presente in (2).

- CINQUINI S., [8] *Sopra il problema dell'approssimazione delle curve in forma parametrica e degli integrali*, « Rend. Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXIX (1960), pp. 515-520.
- [9] *Sopra il problema dell'approssimazione delle curve dello spazio e degli integrali*, « Annali di Matematica pura e applicata », vol. LIV (1961), pp. 335-358.
- [10] *A proposito del problema dell'approssimazione delle curve in forma parametrica e degli integrali*, « Celebrazioni archimedee del secolo XX », Siracusa, 11-16 aprile 1961, vol. II, pp. 87-89.
- [11] *Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti*, « Rend. Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXXII (1962), pp. 320-325.
- [12] *Ancora sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti*, « Rend. Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXXII (1962), pp. 845-851.
- [13] *A proposito dell'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti*, « Mathematicae Notae », (in corso di stampa).
- DARBO G., [1] *L'estremo assoluto per gli integrali su intervallo infinito*, « Rend. Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. 22 (1953), pp. 399-416.
- TONELLI L., [1], [2] *Opere scelte*, vol. II e III. Edizioni Cremonese, Roma (1961-62).
- TRANSUE W., [1] *Sopra un teorema di Cinquini sull'esistenza dell'estremo in campi illimitati*, « Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. 85 (1952), pp. 332-336.
- [2] *Relazioni fra teoremi di esistenza del minimo in campi illimitati*, « Annali di Matematica pura e applicata », vol. XXXIV (1952), pp. 411-419.
-

Il calcolo delle variazioni per gli integrali di Fubini-Tonelli

Riassunto. — *Esposta la teoria fin qui sviluppata degli integrali di Fubini-Tonelli, l'A. presenta una nuova definizione di integrale quasi regolare ed annuncia nuovi risultati che permettono di dare un assetto più organico alla teoria.*

Desidero anzitutto ringraziare l'Accademia delle Scienze di Torino per avermi invitato a partecipare a questo Simposio ed esporre le ragioni per cui ho scelto come tema gli integrali da me chiamati di Fubini-Tonelli.

Fra le vicende della vita avventurosa di Lagrange mi è gradito ricordare che egli insegnò all'École Normale Supérieure di Parigi fino dalla sua fondazione nel 1793-94. Nel gennaio del 1813, cioè pochi mesi prima della morte di Lagrange, il Governo napoleonico fondava a Pisa la Scuola Normale Superiore, succursale di quella di Parigi, con lo scopo di preparare gli insegnanti per tutti i paesi dell'Impero nei quali « fosse autorizzato l'uso della lingua italiana ». A tale decisione non fu forse estranea l'autorità di Lagrange e io la interpreto come una simbolica restituzione e ricompensa di quanto la Francia aveva ricevuto dal grande scienziato italiano.

Fra gli allori più ambiti della Scuola Normale Superiore va ricordato che ivi ricevette la sua formazione scientifica il grande matematico, torinese di adozione, Guido Fubini e che la Scuola Normale Superiore ha fatto trovare a L. Tonelli,

allora italiano di seconda categoria (per esserlo di prima occorreva una tessera speciale) il clima e l'ambiente ideale per continuare le sue ricerche e formare una Scuola di Calcolo delle variazioni, che ha contribuito a far sì che in questo campo l'Italia ritornasse a un livello non indegno dei tempi di Lagrange.

Cinquanta anni or sono l'Accademia delle Scienze di Torino, nell'onorare Lagrange nel 1° centenario della morte, curava la pubblicazione di una raccolta di Memorie in suo onore, uscita sugli Annali di matematica. Fra queste vi è una memoria di G. Fubini, dal titolo: « Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali », che — forse per una certa oscurità di esposizione — non ha avuto subito gli echi che avrebbe meritato, per l'ingegnosità dei metodi usati e per gli sviluppi che lasciava intravedere.

Il tema che io tratterò illustrerà la teoria sviluppatasi negli ultimi 20 anni da quel seme gettato da Fubini per onorare Lagrange.

E poichè l'opera di un grande si misura non solo dai risultati da lui personalmente conseguiti durante l'arco della sua vita, ma anche dai fermenti che continua a suscitare in quelli che vengono dopo di lui, possiamo dire che questa teoria, iniziata da Fubini come omaggio alla memoria di Lagrange, ci dà la misura del fascino che la sua figura e la sua opera continuano ad esercitare sui matematici della generazione attuale.

È ben noto che la critica di Weierstrass scosse alla base il Calcolo delle variazioni classico, ponendo l'esigenza di una dimostrazione diretta dell'esistenza della soluzione nel problema di Dirichlet. La prima soluzione di questo problema fu data da Hilbert, che — riprendendo e perfezionando un precedente tentativo di Arzelà — elaborò un metodo diretto per l'esistenza dell'estremo. Meditando su queste ricerche, negli anni 1910-14 L. Tonelli scoperse la ragione del successo del metodo di Hilbert e cioè la semicontinuità dell'integrale considerato, che veniva prima nascosta da particolari pro-

prietà dell'integrale studiato, in particolare dalla linearità della relativa equazione di Eulero.

Mentre Tonelli elaborava il suo metodo diretto appariva nel 1913 la Memoria che ho già citato di Fubini, nella quale veniva considerato per la prima volta un integrale che diremo di Fubini-Tonelli:

Intendiamo per campo A un insieme chiuso di punti del piano (x, y) ; la funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ è definita e continua per ogni coppia (x, y_1) e (z, y_2) di A e ogni valore finito di y'_1 e y'_2 .

Diremo curva C ordinaria ogni funzione $y = y(x)$ assolutamente continua per $a \leq x \leq b$ appartenente ad A e per cui esiste finito l'integrale, nel senso di Lebesgue,

$$(1) \quad I(y) = \int_a^b \int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)] dx dz.$$

Fubini si pose il problema della ricerca dei massimi e minimi di $I(y)$ in una classe di curve C tutte passanti per due punti fissi.

Fubini nella introduzione del suo lavoro, osserva:

« Lo studio di questi nuovi problemi apre tutto un nuovo indirizzo di ricerche, in cui sarebbe del massimo interesse trovare effettivamente condizioni necessarie e sufficienti per un massimo o per un minimo, seguendo l'ordine di studi, che è stato aperto da Legendre, Jacobi, Weierstrass, Hilbert. Ma non può essere questo lo scopo di un primo lavoro, il quale, più che altro, deve essere dedicato a dimostrare con esempi particolari che i nuovi problemi non sono scelti a caso, ma che il loro studio getta nuova luce in altri campi dell'analisi matematica.

E noi proveremo appunto che le nostre ricerche conducono per via semplice ed uniforme a risultati nuovi nel campo delle equazioni integro-differenziali: risultati che non sembrano facilmente conseguibili coi metodi finora applicati alle ordinarie equazioni del Fredholm.

Ma nonostante questi risultati, molto più numerose sono le questioni da noi poste, che i problemi risolti in queste pagine, le quali vogliono essenzialmente contenere i primi germi di un nuovo capitolo di quel calcolo funzionale, alla costruzione dei quali tanti sforzi sono ora diretti! ».

Esaminiamo ora in qual modo Fubini iniziò lo studio dell'integrale $I(y)$.

Egli si pone anzitutto in una posizione classica e suppone che la funzione f abbia le condizioni di regolarità occorrenti e che il problema ammetta una soluzione $y(x)$ dotata di derivata seconda. In tal caso, potendosi sempre supporre che esista la relazione di simmetria

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = f(z, x, y_2, y_1, y'_2, y'_1),$$

egli dimostra che l'estremante verifica necessariamente l'equazione integro-differenziale di Eulero

$$(2) \quad \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_1} \right) \right\} dz = 0.$$

A questo punto Fubini osserva che non avendosi teoremi di esistenza per i problemi ai limiti per tale equazione, occorre — come era stato già fatto per il problema di Dirichlet — affrontare con un metodo diretto il problema della esistenza dell'estremo per $I(y)$.

Fubini ha sviluppato ciò, seguendo i procedimenti di Hilbert, nel caso che la f sia un polinomio di 2° grado in y_1, y_2, y'_1, y'_2 a coefficienti funzioni di x e z .

Con la sua memoria il Fubini aveva quindi già portato ad un notevole livello la teoria dell'integrale $I(y)$, paragonabile a quello a cui era allora giunto il calcolo delle variazioni per gli integrali multipli con la soluzione del problema di Dirichlet.

Salvo qualche risultato marginale, si può dire che il problema posto da Fubini è stato abbandonato per oltre 25 anni, sia perchè lo stesso Fubini è stato successivamente attratto

da nuovi interessi in altri campi dell'Analisi, sia perchè il fiorire del metodo diretto nel Calcolo delle variazioni portava ad occuparsi della trattazione rigorosa dei problemi classici, prima di porne di nuovi.

È soltanto nel 1939 che L. Tonelli scrive una memoria che egli considera come un primo avviamento allo studio degli integrali $I(y)$, dato che anch'egli si limita a considerare dei casi particolari, che non tutti rientrano in quelli considerati da Fubini. Lo scopo di Tonelli era quello di dimostrare che si potevano col suo metodo ritrovare i classici risultati sui nuclei simmetrici per le equazioni integrali di Fredholm e forse è stato questo suo obbiettivo limitato che non gli ha fatto collegare questo suo lavoro alla ormai dimenticata Memoria di Fubini.

Successivamente in una relazione preparata nel 1939 per il Convegno Volta, Tonelli ritornò sull'argomento per segnalare l'interesse di costruire il calcolo delle variazioni per l'integrale $I(y)$.

Ricordo ancora che in quello stesso tempo Picone e Fichera avevano studiato, avendo di mira la teoria delle equazioni integrali, dei funzionali particolari che possono considerarsi anch'essi del tipo di $I(y)$.

Su suggerimento del mio maestro Tonelli io ho iniziato a costruire, seguendo il suo metodo diretto, la teoria per l'integrale $I(y)$; i miei lavori sull'argomento furono ritardati dal mio richiamo alle armi e uscirono attorno al 1945.

Anzitutto io ritenni che fosse conveniente di studiare, assieme ad $I(y)$, un altro integrale, che dirò $I(y_1, y_2)$ e che ora definisco.

Diremo campo $A_1(A_2)$ un insieme chiuso di punti del piano $x, y_1(z, y_2)$ e campo A l'insieme dei punti (x, z, y_1, y_2) dello spazio a quattro dimensioni prodotto di A_1 e A_2 : $A = A_1 \times A_2$. Diremo curva C ogni coppia di funzioni assolutamente continue $y_1 = y_1(x)$, $a \leq x \leq b$, $y_2 = y_2(z)$, $c \leq z \leq d$, con $[x, y_1(x)]$ appartenenti ad A_1 e $[z, y_2(z)]$ ad A_2 ; C si dirà

poi *curva ordinaria* se esiste finito l'integrale nel senso di Lebesgue

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)] dx dz.$$

Per la semi-continuità inferiore di $I(y_1, y_2)$ in tutto A (cioè su ogni curva ordinaria) nella metrica lagrangiana di ordine zero si trova che deve essere, qualora tali derivate esistano,

$$(3) \quad f_{y_1' y_1'} \geq 0, \quad f_{y_2' y_2'} \geq 0.$$

Per gli ordinari integrali semplici e doppi del calcolo delle variazioni

$$\mathfrak{I}_C(y) = \int_C F[x, y(x), y'(x)] dx,$$

$$\mathfrak{I}_D(z) = \iint_D \Phi[x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)] dx dy$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q \right),$$

le corrispondenti condizioni necessarie sono rispettivamente

$$F_{y'y'} \geq 0 \text{ e } \Phi_{pp} \geq 0, \quad \Phi_{qq} \geq 0, \quad \Phi_{pp}\Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 \geq 0.$$

Per $I(y_1, y_2)$ si dimostra che non è necessario per la sua semicontinuità che sia

$$f_{y_1' y_1'} f_{y_2' y_2'} - f_{y_1' y_2'}^2 \geq 0$$

e cioè l'analogia è più stretta con l'integrale curvilineo che non con l'integrale doppio.

Per l'integrale $\mathfrak{I}_C(y)$ la semicontinuità su una data curva porta la semicontinuità nello stesso senso su ogni arco di questa curva; lo stesso accade per $\mathfrak{I}_D(z)$, mentre non è vero per $I(y_1, y_2)$. Ciò dipende dal fatto che $I(y_1, y_2)$ non è additivo sugli archi di C e ciò arreca notevoli difficoltà nello studio di $I(y_1, y_2)$.

Perchè $I(y_1, y_2)$ sia semicontinuo su una data curva C e su ogni suo arco devono essere verificate su C le (3); perchè

$I(y_1, y_2)$ sia semicontinuo solo su C , nel caso più semplice che $y'_1(x)$ e $y'_2(z)$ siano continue, devono essere verificate le relazioni globali su C

$$(4) \quad \int_c^d f_{y'_1 y'_1} dz \geq 0 \quad \text{per ogni } x \text{ di } (a, b),$$

$$\int_a^b f_{y'_2 y'_2} dx \geq 0 \quad \text{per ogni } z \text{ di } (c, d).$$

Una formulazione più generale di tali condizioni si ha introducendo le funzioni $\mathfrak{E}_1$ e $\mathfrak{E}_2$ di Weierstrass, che non presuppongono l'esistenza delle $f_{y'_1 y'_1}$ e $f_{y'_2 y'_2}$.

Si definisce

$$\mathfrak{E}_1 = f(x, z, y_1, y_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) - f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) -$$

$$- (\bar{y}'_1 - y'_1) f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$$

e analogamente la $\mathfrak{E}_2$.

Ho dimostrato che per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$ in tutto il campo A deve essere $\mathfrak{E}_1 \geq 0$ ed $\mathfrak{E}_2 \geq 0$ e condizioni analoghe alle (4) per la semicontinuità su una particolare curva.

Per l'integrale curvilineo $\mathfrak{J}_C(y)$ la condizione di Weierstrass $\mathfrak{E} \geq 0$ si riduce a quella di Legendre $f_{y' y'} \geq 0$ se la f possiede la $f_{y' y'}$; invece per $I(y_1, y_2)$ può accadere che siano verificate su una curva le condizioni di Weierstrass e non quelle di Legendre, anche se la f possiede continue le $f_{y'_1 y'_1}$ e $f_{y'_2 y'_2}$.

Per l'integrale simmetrico $I(y)$ si giunge alle condizioni puntuali (1) solo nei punti $x = z$, $y_1 = y_2$, $y'_1 = y'_2$ mentre negli altri punti non si possono avere se non condizioni globali, analoghe alle (4) che ora si riducono a una sola per la simmetria della funzione integranda.

Per $I(y)$ si ha l'ulteriore particolarità che se esso è semicontinuo nello stesso senso sulle curve C_1 e C_2 può non esserlo sulla curva $C_1 + C_2$.

Se $I(y_1, y_2)$ è continuo allora segue dalle (3) che la f è lineare rispetto a y'_1 e y'_2 separatamente, cioè f deve avere la forma

$$f = P(x, z, y_1, y_2) + y'_1 Q(x, z, y_1, y_2) + y'_2 R(x, z, y_1, y_2) + \\ + y'_1 y'_2 S(x, z, y_1, y_2) ;$$

se $P, \frac{\delta Q}{\delta x}, \frac{\delta R}{\delta z}, \frac{\delta^2 S}{\delta x \delta z}$ sono continue ho potuto dimostrare che $I(y_1, y_2)$ è continuo.

In tal modo è caratterizzata la classe degli integrali $I(y_1, y_2)$ continui. Per ottenere la condizione sufficiente per la continuità ho stabilito alcuni criteri di uguale continuità per classi di integrali curvilinei continui, che si sono rivelati utili nelle ricerche successive.

Giunto a questo punto dello sviluppo della teoria, in un momento di sfiducia e di crisi spirituale, io pensai di affidarne la continuazione a chi avesse ancora intatto l'iniziale entusiasmo e desse affidamento di portarla a rapido compimento. Perciò additai la questione all'allora giovane promettente Enrico Magenes, che vi si dedicò con il massimo slancio, sviluppandone nel giro di tre anni i capitoli più importanti.

Il primo passo obbligato era quello di trovare le condizioni sufficienti per la semicontinuità. A tale problema Magenes dedicò una grossa Memoria, nella quale è contenuto un esempio ingegnoso — su cui poi ritornerò — di un funzionale $I(y_1, y_2)$ soddisfacente alle condizioni necessarie da me date ma non semicontinuo inferiormente. Magenes osserva che per l'integrale curvilineo $J_C(y)$ la condizione $F_{y'y'} \geq 0$ limita il comportamento all'infinito della figurativa e cioè porta a una disuguaglianza del tipo

$$F(x, y, y') \geq P(x, y) + y'Q(x, y)$$

da cui segue per ogni (x, y)

$$\text{estr inf } \frac{F(x, y, y')}{\sqrt{1 + y'^2}} > -\infty .$$

Da questo esempio Magenes ha dedotto, nel caso particolare che $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ sia continua rispetto a x, z, y_1, y_2 uniformemente rispetto a y'_1 e y'_2 , che condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$ è che sia in ogni punto di A .

$$(5) \quad \text{estr inf} \frac{f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)}{\sqrt{1 + y_1'^2} \sqrt{1 + y_2'^2}} > = -\infty.$$

Queste condizioni, su cui ritornerò più avanti, hanno portato Magenes a cercare condizioni sufficienti per la semicontinuità dando la seguente definizione di quasi-regolarità per l'integrale $I(y_1, y_2)$.

Magenes dice che $I(y_1, y_2)$ è *quasi regolare positivo* (q.r.p.) se in tutto A e per y'_1 e y'_2 qualunque valgono le (3) e inoltre esistono 4 funzioni continue P, Q, R, S di (x, z, y_1, y_2) tali che sia in tutto A e per $y'_1 y'_2$ qualsiasi

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq P + Qy'_1 + Ry'_2 + Sy'_1 y'_2.$$

Questa condizione è indipendente dalle (3).

Non si hanno però criteri generali per decidere quando $I(y_1, y_2)$ è q.r.p. e per trovare le 4 funzioni P, Q, R, S , che non sono univocamente determinate.

Un'altra definizione data da Magenes è quella di $I(y_1, y_2)$ q.r.p. *seminormale* rispetto a y'_1 o y'_2 .

Ciò si ha quando $I(y_1, y_2)$ è q.r.p. e se per ogni punto $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ di A si possono trovare i numeri p, q, r, s, v, ϱ e Y' , con $v > 0$, $\varrho > 0$, $Y' \geq 1$ tali che in tutti i punti di A , con (x_1, y_1) che dista in A_1 non più di ϱ da $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e (z_1, y_2) che dista non più di ϱ da $(\bar{z}_1, \bar{y}_2)$ in A_2 sia

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p + qy'_1 + ry'_2 + sy'_1 y'_2.$$

per ogni y'_1 e y'_2 e

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + qy'_1 + ry'_2 + sy'_1 y'_2) \geq v|y'_1|$$

per ogni valore di y'_2 e $|y'_1| \geq Y'$.

Analoga definizione per la seminormalità rispetto a y'_2 .

Mancano però criteri per decidere se $I(y_1, y_2)$ è o no seminormale.

Magenes ha dimostrato, seguendo la falsariga di una dimostrazione di Tonelli per l'integrale curvilineo, che se l'integrale $I(y_1, y_2)$ è q.r.p. e seminormale, con qualche ipotesi di derivabilità per la f , allora $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente.

L. Lombardi ha dato successivamente un'altra nozione di integrale q.r.p. Per gli integrali curvilinei $J(c) = \int_C f(x, y, y') dx$ la nozione di integrale q.r.p. equivale al fatto che per ogni $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ esiste una $\bar{f}(x, y, y')$ lineare in y' , cioè un $\int \bar{f}(x, y, y') dx$ continuo, con $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$ e con $f(\bar{x}, \bar{y}, y') \geq \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, y')$ per ogni y' . Poichè per gli integrali $I(y_1, y_2)$ la classe di quelli continui è nota, Lombardi chiama q.r.p. ogni $I(y_1, y_2)$ tale che, fissati comunque $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ e $\bar{Q} \equiv (\bar{y}'_1, \bar{y}'_2)$ esiste un integrale continuo $\int \bar{f}(P, Q) dx dz$ che in generale dipenderà da $\bar{P}, \bar{Q}$, tale che sia $\bar{f}(\bar{P}, \bar{Q}) = f(\bar{P}, \bar{Q})$ e $f(P, Q) \geq \bar{f}(\bar{P}, \bar{Q})$ per ogni Q .

È ovvio che ogni integrale q.r.p. secondo Lombardi lo è anche secondo Magenes, in quanto la condizione di Lombardi implica che siano verificate le (3).

Lombardi ha dimostrato che se un integrale $I(y_1, y_2)$ è q.r.p. nel suo senso esso è semicontinuo su ogni curva (y_1, y_2) con y_1 e y_2 lipschitziane.

La dimostrazione di Lombardi è parallela ad una di Tonelli per gli integrali $J_C(y)$. Tonelli toglie la condizione di lipschitzianità costruendo una nuova funzione g che coincide con f per $|y'| \leq k$, con figurativa convessa, tale che per $|y'| > k$ sia $f \geq g$ ed inoltre tale da avere g_y limitata.

Lombardi ha indicato casi in cui tale costruzione si trasporta agli integrali $I(y_1, y_2)$ ma non si sa se ciò si possa fare per ogni integrale q.r.p.

La proprietà suddetta per gli integrali $I(y_1, y_2)$ è detta da Lombardi asintotica bilinearizzabilità (a.b.). Egli dimostra

poi che ogni integrale q.r.p. e asintoticamente bilinearizzabile è semicontinuo inferiormente.

Dalle condizioni sufficienti per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ si deducono subito condizioni sufficienti per quella di $I(y)$.

Una volta stabiliti i concetti di integrale quasi regolare e seminormale Magenes è passato ad estendere i teoremi di esistenza di Tonelli all'integrale $I(y_1, y_2)$ in una classe di curve K completa, cioè chiusa rispetto alla metrica uniforme.

Egli ha anzitutto osservato che se non si fanno ipotesi sulla classe K di curve in cui si cerca il minimo, questo può non esistere anche nei casi in cui la funzione f è estremamente semplice ed è condotto a porre la condizione che esista una costante $\eta > 0$ tale che ogni curva C di K ha componenti y_1 e y_2 definite ciascuna su un intervallo di lunghezza almeno η ; una tale classe verrà indicata con K_η .

Magenes ottiene così una estensione alle classi K_η del teorema di Nagumo e cioè:

« Se $I(y_1, y_2)$ è q.r.p. seminormale ed esistono due funzioni $\Phi_1(u)$ e $\Phi_2(u)$ ($u > 0$), inferiormente limitate e con $\frac{\Phi_1(u)}{u} \rightarrow +\infty$ e $\frac{\Phi_2(u)}{u} \rightarrow +\infty$ per $u \rightarrow +\infty$ e per cui sia in tutto A e per ogni y_1, y_2

$$(6) \quad f \geq \Phi_1(|y'_1|) \quad \text{e} \quad f \geq \Phi_2(|y'_2|),$$

allora in ogni classe completa K_η di curve ordinarie appartenenti ad A esiste il minimo assoluto di $I(y_1, y_2)$ ».

Magenes ha poi esteso il teorema di McShane in cui alle (6) si sostituisce il fatto che f è inferiormente limitata e che è

$$\lim_{|y'_1| \rightarrow \infty} \frac{f}{|y'_1|} = \lim_{|y'_2| \rightarrow \infty} \frac{f}{|y'_2|} = +\infty,$$

uniformemente rispetto alle altre variabili.

Egli ha inoltre esteso altri teoremi di Tonelli che affinano le condizioni di Nagumo e McShane, trattando anche il caso in cui il campo A è non limitato.

Passando all'integrale $I(y)$ l'estensione del teorema di Nagumo data da Mages porta all'unica disuguaglianza

$$f \geq \Phi(|y'_1|, |y'_2|)$$

con $\frac{\Phi(u, t)}{ut} \rightarrow +\infty$ per $ut \rightarrow +\infty$.

L'integrale $I(y)$ non presenta alcune anomalie che invece si incontrano in $I(y_1, y_2)$. Ad es. per $f = y_1'^2 y_2'^2$ se per le funzioni y di K $I(y)$ è superiormente limitato, le y sono equiassolutamente continue; se invece è

$$\int_a^b \int_c^d y_1'^2(x) y_2'^2(z) dx dz = \int_a^b y_1'^2(x) dx \int_c^d y_2'^2(z) dz < L$$

non è detto che siano superiormente limitati i due fattori

$$\int_a^b y_1'^2 dx \text{ e } \int_c^d y_2'^2 dz$$

e non si può dedurre l'equiassoluta continuità di $y_1'(x)$ e $y_2'(x)$ in K .

Tale questione è stata approfondita da Lombardi che ha chiamato regolare una classe completa K di curve $(y_1(x), y_2(z))$ quando in sostanza dalla disuguaglianza

$$\int_a^b y_1'^2(x) dx \cdot \int_c^d y_1'^2(z) dz < L$$

si può dedurre che sono superiormente limitati nella classe K gli insiemi di integrali

$$\int_a^b y_1'^2(x) dx \text{ e } \int_a^b y_2'^2(z) dz,$$

come accade ovviamente quando si considera $I(y)$ in cui è sempre $y_1(x) = y_2(x)$.

Lombardi ha dato anche alcuni criteri per la regolarità di una classe di curve. Egli ha potuto così dimostrare l'esistenza del minimo in ogni classe completa e regolare di curve ordinarie per un integrale q.r.p. e a.b. per cui la f è inferior-

mente limitata e per cui esistono due numeri positivi Y e α tali che per $|y'_1 y'_2| > Y'$ risulti

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq |y'_1|^{1+\alpha} |y'_2|^{1+\alpha}.$$

Successivamente Lombardi ha esteso questi risultati, relativi alla semicontinuità ed esistenza dell'estremo, a integrali dipendenti da un numero qualunque di curve e più in generale a integrali dipendenti da una varietà V , costituita da un vettore di m funzioni componenti $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), x essendo un punto di un insieme di S_n . Egli considera un integrale dipendente dal vettore p delle derivate parziali prime delle $y_i(x)$ che indica con

$$\int_D \Phi(x, y, p) dx$$

D essendo l'insieme prodotto di insiemi D_i ($i = 1, 2, \dots, m$) di S_n e $\Phi(x, y, p)$ una funzione assegnata dei suoi argomenti.

Questi lavori di Lombardi sono pregevoli per le concise notazioni vettoriali che permettono un sintetico simbolismo, pur non contenendo risultati di nuovo tipo, essendosi egli limitato a estendere formalmente i suoi precedenti teoremi.

Nei suoi ultimi lavori, per suggestione d'oltre oceano, egli chiama « problema di Tonelli » lo studio degli integrali che io ho chiamato di Fubini-Tonelli e che così continuerò a chiamare, perchè riconosco fondamentale l'opera di Fubini per la priorità nella posizione del problema e per la genialità dei contributi, soprattutto se si tien conto del fatto che 50 anni or sono i metodi diretti, di cui Fubini ha fatto uso, non erano ancora stati completamente elaborati.

Dopo aver stabilito i suoi teoremi di esistenza, Magenes è passato a studiare le equazioni di Eulero per gli integrali $I(y_1, y_2)$ e $I(y)$. Per l'integrale $I(y)$ egli così ritrova l'equazione (2) già stabilita da Fubini; per $I(y_1, y_2)$ si ha un sistema di due equazioni integro-differenziali. Egli precisa il concetto di estrema ed estremaloide e dà condizioni sufficienti perchè una estremaloide sia un'estrema.

Egli si è poi occupato dell'esistenza e dell'unicità delle estremali, per le quali non è in generale possibile considerare problemi in piccolo, come accade per il classico integrale curvilineo. Magenes dà quindi criteri di esistenza per problemi in grande, nei quali sono assegnati condizioni ai limiti e condizioni di tipo iniziale. In tale ricerca Magenes ha seguito la via tracciata da Tonelli e ha inoltre mostrato applicazioni della teoria svolta alle equazioni integro-differenziali.

Magenes si è poi occupato del minimo relativo per gli integrali di Fubini-Tonelli. Egli ha studiato la variazione seconda estendendo la condizione di Jacobi e dando quindi condizioni sufficienti per il minimo relativo debole, impostando tale studio attraverso il così detto « problema ai limiti accessorio », secondo l'indirizzo di Hilbert e conseguendo risultati assai notevoli per le equazioni integro-differenziali.

Magenes si è infine occupato del problema di dare condizioni sufficienti per il minimo relativo semiforte.

Viene detta minimante relativa semiforte una $\bar{C}$ tale che $I(\bar{C}) \leq I(C)$ per tutte le C aventi gli stessi estremi di $\bar{C}$, appartenenti a un opportuno intorno di $\bar{C}$, e per cui le corrispondenti derivate differiscono quasi ovunque per meno di una prefissata costante.

A proposito di questo problema Magenes osserva che mentre per il minimo relativo forte, cioè senza il vincolo per le derivate, è impossibile esprimere condizioni sufficienti per la semicontinuità *solo* attraverso le derivate parziali $f_{y_1 y_1}$ ed $f_{y_2 y_2}$ per quello semiforte ciò si può fare.

Questa osservazione gli ha permesso così, adattando un procedimento di Mc. Shane, di ottenere condizioni sufficienti per il minimo relativo semiforte.

Nel complesso Magenes, superando notevoli difficoltà, ha tracciato le linee fondamentali del Calcolo delle variazioni per gli intervalli di Fubini-Tonelli, ponendo e resolvendo anche problemi che solo in epoca recente erano stati risolti per gli integrali classici.

A questo punto io dovrei concludere la mia relazione; devo però confessare che nel prepararla sono stato ripreso dal fascino di questi studi e, nonostante i gravi impegni del mio ufficio, ho potuto apportare nuovi contributi, che ritengo mi condurranno a dare una nuova sistemazione alla teoria.

Fra le questioni lasciate aperte dalle ricerche di Magenes e Lombardi due mi sembrano essenziali per la completezza della teoria e per la loro influenza anche sui capitoli più avanzati.

La prima è che è ancora troppo largo il fossato fra le condizioni necessarie e quelle sufficienti per la semicontinuità. La seconda è che le definizioni di integrale quasi regolare positivo date da entrambi sono fondate sulla esistenza di uno o infiniti paraboloidi situati al disotto della figurativa, senza che si sappia non solo come si possano trovare ma nemmeno quando essi esistano o no.

Pertanto mentre per gli integrali classici le condizioni sufficienti per la semicontinuità sono espresse da proprietà delle derivate della funzione integranda, per quelli di Fubini-Tonelli essi dipendono anche dalla esistenza di questi paraboloidi, che non è detto siano essenziali, perchè sono soltanto lo strumento per poter estendere un tipo di ragionamento di Tonelli.

Volendo affrontare questi due problemi pensai dapprima di cercare nuove condizioni necessarie per la semicontinuità e di cominciare anzitutto con l'allargare il campo di validità della condizione necessaria (5) data da Magenes limitatamente al caso in cui la $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ fosse continua rispetto a (x, z, y_1, y_2) uniformemente rispetto a y'_1 e y'_2 .

La dimostrazione di Magenes è fondata sul fatto che se in un punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ non è soddisfatta la (5), allora fissato un numero N ad arbitrio esistono curve ordinarie, appartenenti a un intorno comunque piccolo di $\bar{P}$, per cui l'integrale vale meno di N . Manca pertanto la semicontinuità sulla curva ridotta ai due punti $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ e $(z, \bar{y}_2)$. Ciò è illustrato dal seguente esempio dato da Magenes fin dal suo primo lavoro:

La funzione

$$f^*(y_1, y_2) = e^{2(y_1' - y_2')^2} + \frac{1}{2} y_1'^4 + \frac{1}{3} y_1'^3 y_2' - 2 y_1'^2 y_2'^2 + \\ + \frac{1}{3} y_1' y_2'^3 + \frac{1}{2} y_2'^4 - 1$$

soddisfa alle condizioni

$$f_{y_1' y_1'}^* \geq 0, \quad f_{y_2' y_2'}^* \geq 0 \text{ ed è } f^*(y_1', y_2') = -\frac{1}{3} y_1'^4.$$

L'insieme di curve

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} x \quad (0 \leq x \leq b^{\frac{3}{2}}) \\ y_2 = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} z \quad (0 \leq z \leq b^{\frac{3}{2}}) \end{array} \right.$$

dove b , con $0 < b \leq 1$ è un parametro, dà all'integrale

$$I^*(y_1, y_2) = \iint f^*(y_1, y_2) dx dz$$

il valore

$$(7) \quad I^*(y_1, y_2) = -\frac{1}{3} \int_0^{b^{\frac{3}{2}}} \int_0^{b^{\frac{3}{2}}} y_1'^2 y_2'^2 dx dz = -\frac{(1-b^2)^2}{b};$$

per $b \rightarrow +0$ la curva (y_1, y_2) tende alla coppia di punti $(x=0, y_1=0)$ e $(z=0, y_2=0)$ mentre l'integrale tende a $-\infty$.

Studiando questo esempio potei dimostrare, con una dimostrazione assai complessa e legata alla struttura analitica della $f^*(y_1, y_2)$, che l'integrale $I^*(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria avente derivate prime assolutamente continue.

Questo fatto non è in contraddizione con quanto dimostrato da Magenes, il quale dà una condizione necessaria per la semicontinuità su ogni curva ordinaria, non escludendosi che su classi particolari di curve quella condizione non sia necessaria.

Era perciò essenziale caratterizzare la classe di curve ordinarie su cui manca la semicontinuità di $I^*(y_1, y_2)$ e spie-

gare come la semicontinuità, che manca sulle curve ridotte a una coppia di punti, riappaia per una vasta classe, pur potendosi pensare ciascuna di esse come un insieme di coppie di punti.

Ritengo opportuno considerare il seguente esempio:

Sulla curva $\bar{y}_1 = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $\bar{y}_2 = 0$, $0 \leq z \leq 1$ l'integrale $I^*(y_1, y_2)$ ha il valore zero; le curve, dipendenti dal parametro b ($0 < b \leq 1$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{1,b} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} x & \text{per } 0 \leq x \leq b^{3/2} \\ y_{1,b} = \sqrt{(1-b^2)b} & \text{per } b^{3/2} \leq x \leq 1 \\ y_{2,b} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} z & \text{per } 0 \leq z \leq b^{3/2} \\ y_{2,b} = \sqrt{(1-b^2)b} & \text{per } b^{3/2} \leq z \leq 1 \end{array} \right.$$

tendono uniformemente a $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ per $b \rightarrow +0$; esse, sull'intervallo $0 \leq x \leq b^{3/2}$, $0 \leq z \leq b^{3/2}$ si riducono a quelle considerate da Magenes che danno all'integrale $I^*(y_1, y_2)$ il valore espresso dalla (7).

Si ha ora

$$\begin{aligned} I^*[y_{1,b}, y_{2,b}] &= \int_0^1 \int_0^1 f^*[y_{1,b}, y_{2,b}] dx dz = \\ &= \int_0^{b^{3/2}} \int_0^{b^{3/2}} f^*[y_{1,b}, y_{2,b}] dx dz + 2 \int_{b^{3/2}}^1 \int_0^{b^{3/2}} f^*[y'_{1,b}, y'_{2,b}] dx dz = \\ &= -\frac{(1-b^2)^2}{3b} + 2 \left[e^{\frac{2(1-b^2)}{b^2}} + \frac{1}{2} \frac{(1-b^2)^2}{b^4} - 1 \right] (1-b^{3/2}) b^{3/2} \end{aligned}$$

che per $b \rightarrow +0$ tende a $+\infty$.

L'integrale $I^*(y_1, y_2)$ è quindi semicontinuo su $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ relativamente alla famiglia di curve $(y_{1,b}, y_{2,b})$; non lo è invece sulla curva ridotta alla coppia di punti ($x=0$, $y_1=0$) ($z=0$, $y_2=0$) relativamente agli archi della stessa famiglia di curve

appartenenti a intorni comunque piccoli di tale coppia di punti ⁽¹⁾).

Ciò dipende dal fatto che se $\bar{y}_1(x)$, $[\bar{y}_2(z)]$ non si riduce a un punto di $A_1[A_2]$, tutte le $y_1(x)$, $[y_2(z)]$ che appartengono a un intorno abbastanza piccolo di $\bar{y}_1(x)$, $[\bar{y}_2(z)]$ o sono tali che $y'_1(x) - \bar{y}'_1(x)$, $[y'_2(z) - \bar{y}'_2(z)]$ si mantiene piccola in valore assoluto, oppure se tale espressione assume valori grandi deve risultare sia positiva sia negativa sul rispettivo intervallo.

Mi formai da ciò la convinzione che la condizione di Ma-
genes fosse necessaria per la semicontinuità soltanto sulle
curve di cui almeno una componente degenera in un punto
e che pertanto tale condizione non fosse necessaria per le curve

⁽¹⁾ È agevole dimostrare che $I^*(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferior-
mente su $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$.

Se $(y_1(x), y_2(x))$, è un'altra curva ordinaria, definita per $0 \leq x \leq 1$
e per $0 \leq z \leq 1$ e appartenente a un intorno di ampiezza ϱ di $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$
risulta

$$\begin{aligned} f^*(y_1, y_2) &\geq 2(y'_1 - y'_2)^2 + \frac{5}{2}(y'_1 - y'_2)^4 + \frac{7}{3}(y'_1 - y'_2)^2 y'_1 y'_2 - \frac{1}{3} y_1'^2 y_2'^2 \geq \\ &\geq 2(y_1'^2 + y_2'^2) - 4y'_1 y'_2 + \frac{5}{2}(y_1'^4 + y_2'^4) - \frac{23}{3}(y_1'^2 + y_2'^2) y'_1 y'_2. \end{aligned}$$

Si ha

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left[2y_1'^2 + \frac{5}{2} y_1'^4 - \frac{23}{3} y_1'^3 y_2' \right] dx dz \geq \int_0^1 y_1'^2 \left[2 + \frac{5}{2} y_1'^2 - 16\varrho |y_1'| \right] dx;$$

per $\varrho > 0$ e abbastanza piccolo, qualunque sia y'_1 , risulta

$$2 + \frac{5}{2} y_1'^2 - 16\varrho |y_1'| > 0;$$

pertanto è $I_1 \geq 0$ e analogamente

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[2y_2'^2 + \frac{5}{2} y_2'^4 - \frac{23}{3} y_1' y_2'^3 \right] dz \geq 0.$$

Poichè è $I^*(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0$, se ϱ è abbastanza piccolo per ogni curva (y_1, y_2)
appartenente all'intorno (ϱ) di $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ è

$$I^*(y_1, y_2) \geq I^*(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - 4 \int_0^1 \int_0^1 y_1' y_2' dx dz \geq I^*(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - 16\varrho^2,$$

che prova la semicontinuità di $I^*(y_1, y_2)$ su $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$.

ordinarie effettive, le sole che interessano in questa teoria, come è anche provato dalla considerazione delle classi K_η introdotte dallo stesso Magenes.

Al tempo stesso mi convinsi che le condizioni necessarie da me trovate potevano essere anche sufficienti per la semicontinuità, ma che si dovesse riesaminare tutta la teoria, staccandosi dagli schemi dimostrativi di Tonelli che portano a introdurre quei paraboloidi artificiali, al posto delle varietà lineari tangenti alla figurativa che, nei casi trattati da Tonelli, si presentano invece in modo del tutto naturale.

Il successo dei procedimenti dimostrativi di Tonelli, per quanto riguarda la semicontinuità, è fondato su due pilastri:

1) uso dell'integrale di Lebesgue e considerazione della classe delle funzioni assolutamente continue;

2) uso della formula di Taylor: mediante essa la figurativa si scompone in termini lineari e quadratici nelle derivate; i termini lineari danno un'integrale continuo, mentre quelli quadratici (se costituiscono una forma quadratica definita) caratterizzano la semicontinuità.

Già nel primo lavoro io avevo notato che la formula Taylor non andava bene per gli integrali di Fubini-Tonelli, perchè gli integrali continui non sono dati dai soli termini lineari nelle derivate e perchè non è necessario che la forma quadratica suddetta sia definita affinchè l'integrale sia semicontinuo.

Occorreva pertanto trovare un altro modo di scomporre la figurativa, che sostituisse la formula di Taylor, e che caratterizzasse da un lato gli integrali continui e dall'altro quelli semicontinui.

Al tempo stesso pensai che, crollato per gli integrali di Fubini-Tonelli il pilastro della formula di Taylor, occorresse per essi riesaminare anche l'altro e partire da nuove basi che permettessero insieme di costruire la teoria con la stessa eleganza e completezza con cui Tonelli ha caratterizzato la semicontinuità per gli integrali classici.

Era naturale che, trovando non idoneo l'integrale di Lebesgue, io mi rivolgessi a quello di Weierstrass, creato per il Calcolo delle variazioni e a cui lo stesso mio Maestro aveva fatto ricorso nei suoi lavori iniziali e sul quale era ritornato negli ultimi anni della Sua vita con una Memoria sulle funzioni di intervallo.

Pensai pertanto di fare uso dell'integrale di Weierstrass e della classe delle curve $C(y_1, y_2)$ con y_1 e y_2 soltanto continue nei rispettivi intervalli e di abbandonare la formula di Taylor, usando in sua vece la convessità della figurativa rispetto a y'_1 e y'_2 separatamente.

Se $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ è supposta soltanto continua in ogni punto di A e per ogni y'_1 e y'_2 e se $C \subseteq (y_1(x), y_2(x))$ ($a \leq x \leq b, c \leq z \leq d$) è continua ed appartiene ad A , definiamo l'integrale di Fubini-Tonelli, nel senso di Weierstrass, nel modo seguente:

Si divida (a, b) in parti mediante i punti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

e così pure (c, d) con i punti

$$c = z_0 < z_1 < \dots < z_m = d$$

e si formi la somma

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f \left[x_i, z_j, y_1(x_i), y_2(z_j), \frac{y_1(x_i) - y_1(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \frac{y_2(z_j) - y_2(z_{j-1})}{z_j - z_{j-1}} \right] (x_i - x_{i-1}) (z_j - z_{j-1}).$$

Se S ha limite finito al tendere a zero della lunghezza del massimo intervallo delle due suddivisioni, tale limite si dirà l'integrale di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass sulla C e si indicherà con $I_W(C)$.

Diremo che $I_W(C)$ è *quasi regolare positivo* se in ogni punto di A la figurativa è convessa positivamente come funzione y'_1 e y'_2 separatamente. L'integrale $I_W(C)$ si dirà poi *q.r.p. semi-*

normale se in nessun punto di A la $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ si riduce a un funzione lineare rispetto a y'_1 e y'_2 separatamente. Qualora la f possieda le $f_{y'_1 y'_1}$ e $f_{y'_2 y'_2}$, $I_W(C)$ è q.r.p. se è $f_{y'_1 y'_1} \geq 0$ e $f_{y'_2 y'_2} \geq 0$ ed è q.r.p. seminormale se in nessun punto di A le $f_{y'_1 y'_1}$ e $f_{y'_2 y'_2}$ sono entrambi nulle per ogni valore di y'_1 e y'_2 .

Si dimostra che, qualora f sia supposta soltanto continua, condizione necessaria per la semicontinuità inferiore su ogni curva ordinaria di $I_W(C)$ è che esso sia q.r.p.

Ho potuto inoltre dimostrare ⁽²⁾ nelle ipotesi di Magenes, cioè se la $f[x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2]$ è continua nei punti di A uniformemente rispetto a y'_1 e y'_2 (senza però nessuna ipotesi di derivabilità sulla f) che se è q.r.p. $I_W(C)$ è semicontinuo inferiormente nella classe delle C per cui esso esiste (finito o no).

Il calcolo delle variazioni per gli intervalli curvilinei con l'uso dell'integrale di Weierstrass è stato sviluppato da C. Menger e dalla sua Scuola per gli integrali in forma parametrica, per i quali lo strumento dell'integrale di Weierstrass si presta in modo particolare.

Per gli integrali in forma ordinaria seguendo una idea di McShane, conviene considerare un integrale ausiliario in forma parametrica, che ha lo stesso valore di quello in forma ordinaria.

Desiderando sviluppare in modo completo la teoria ho pertanto iniziato a studiare gli integrali di Fubini-Tonelli in forma parametrica, l'integrale essendo inteso nel senso di Weierstrass.

Le definizioni di integrale q.r.p. e seminormale che ho dato per gli integrali $I_W(C)$ in forma ordinaria si trasportano immediatamente alla forma parametrica. Posso intanto comunicare i seguenti risultati, nella ipotesi di una funzione integranda continua $f[x_1, y_1, x_2, y_2, x'_1, y'_1, x'_2, y'_2]$ e positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x'_1, y'_1 e x'_2, y'_2 .

⁽²⁾ In un lavoro in corso di stampa negli « Anuali della Scuola Normale Superiore di Pisa », 1964, cui rinvio per la bibliografia.

Sia

$$\mathfrak{J}_W(C) = \iint_C f[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v), dx_1, dy_1, dx_2, dy_2]$$

l'integrale di Weierstrass della f esteso alla curva C , di componenti parametriche $C_1 \equiv (x_1 = x_1(u), y_1 = y_1(u))$ e $C_2 \equiv (x_2 = x_2(v), y_2 = y_2(v))$ e

$$I(C) = \iint_C f[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v), x'_1(u), y'_1(u), x'_2(v), y'_2(v)] du dv$$

il corrispondente integrale nel senso di Lebesgue:

I) Se $\mathfrak{J}_W(C)$ è q.r.p., allora $I_W(C)$ esiste finito sulle curve C con componenti C_1 e C_2 rettificabili ed è $\mathfrak{J}_W(C) = I(C)$.

II) Condizione necessaria perchè $\mathfrak{J}_W(C)$ sia semicontinuo inferiormente è che esso sia q.r.p.

III) Se $\mathfrak{J}_W(C)$ è q.r.p. esso è semicontinuo inferiormente in ogni classe di curve C con componenti di lunghezza superiormente limita.

IV) Se $\mathfrak{J}_W(C)$ è q.r.p. e seminormale esso è semicontinuo inferiormente.

V) Se $\mathfrak{J}_W(C)$ è q.r.p. e se nei punti eccezionali in cui la figurativa si riduce a un paraboloide vale una ulteriore condizione, allora $\mathfrak{J}_W(C)$ è semicontinuo inferiormente.

Da questi teoremi mi riprometto di ritornare, con l'uso di un integrale ausiliario in forma parametrica, a quelli in forma ordinaria, in modo da avere anche per essi una trattazione ugualmente esauriente. Ritengo che quanto ho detto sia sufficiente a mostrare che così si viene a chiudere la lacuna fra le condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità e che la teoria acquista un assetto più armonico e completo.

È mio proposito di ricostruirla su queste nuove basi, quale mio modesto tributo di omaggio a Lagrange e al mio indimenticabile Maestro Leonida Tonelli.

Le calcul des variations et ses extensions

Riassunto. — *Dans notre communication, nous avons résumé et complété deux de nos publications précédentes (I et II, en fin du présent texte). Par manque de temps, nous nous bornerons ici à I (I) et nous nous contenterons d'y ajouter quelques nouveaux compléments. Nos deux principales innovations dans I sont les suivantes.*

I. Montrer que plusieurs résultats classiques du Calcul des Variations s'étendent à l'étude de l'existence et de la détermination de l'extremum local d'une fonctionnelle $K[z]$, pour $z = c$, où K est un nombre et z un élément d'un espace abstrait, que, pour simplifier, nous supposerons être un espace de Banach.

II. Prouver que les résultats obtenus en utilisant la « variation » au sens d'Euler et de Lagrange pour $z = c$ peuvent être étendus ou précisés quand on suppose que $K[z]$ est différentiable (à notre sens) pour $z = c$ ou quand on suppose que $K[z]$ possède pour $z = c$, une « variation généralisée ».

Rappelons les définitions de ces trois notions quand on les étend du cas des intégrales du Calcul des Variations, au cas de la fonctionnelle $K[z]$.

(¹) Nous avons l'intention de montrer que l'exposé actuel fournit des résultats nouveaux même dans le cas des intégrales du Calcul des Variations, complétant ainsi la Note II.

I. Nous avons, il y a longtemps, défini la différentielle d'une fonctionnelle $K[z]$, de la manière suivante: $K[z]$ est différentiable pour $z = c$, s'il existe une fonctionnelle $L[c, \Delta c]$ linéaire en Δc , telle que

$$(1) \quad K[c + \Delta c] = K[c] + \mathfrak{L}[c, \Delta c] + \|\Delta c\| \varepsilon[c, \Delta c]$$

avec

$$(2) \quad \lim_{\|\Delta c\| \rightarrow 0} \varepsilon[c, \Delta c] = 0.$$

Et alors $L[c, \Delta c]$ sera appelée la différentielle de $K[z]$ pour $z = c$

$$\mathfrak{L}[c, \Delta c] \equiv d_{\Delta c} K[c]$$

On dira que $K[z]$ a une différentielle d'ordre n pour $z = c$, si $K[z]$ a une différentielle d'ordre $n - 1$ au voisinage de c et si cette différentielle a une différentielle pour $z = c$.

II. Nous dirons que $K[z]$ a une « variation » d'ordre n au sens de Lagrange, étendu, pour $z = c$, si $K[c + \beta u]$ a une dérivée d'ordre n par rapport à β , pour $\beta = 0$ et où β est un nombre et u un vecteur de l'espace de Banach où se déplace z et que nous désignerons par espace B ou plus brièvement B .

Alors la « variation » d'ordre n de $K[z]$ pour $z = c$, correspondant à u et au nombre α , sera

$$\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{d^n K[c + \beta u]}{d\beta^n} \right) \beta = 0.$$

III. Nous dirons que $K[z]$ a une « variation généralisée » d'ordre n pour $z = c$, correspondant à α et u , s'il existe des fonctions $K_1[c, u] \dots K_n[c, u]$ telles que

$$(3) \quad K[c + \alpha u] = K[c] + \alpha K_1[c, u] + \dots + \alpha^n \{K_n[c, u] + \varepsilon_n[c, u, \alpha]\}$$

avec

$$(4) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varepsilon_n[c, u, \alpha] = 0.$$

COMPARAISONS. — On peut démontrer:

1) que si $K[z]$ est différentiable d'ordre n pour $z = c$, alors, quels que soient a et u , $K[z]$ a une « variation » d'ordre n et une « variation généralisée » d'ordre n pour $z = c$, correspondant à a et u , ces deux dernières étant égales pour $n = 1$.

On peut démontrer que $K_p[c, u]$ est homogène en u et de degré p :

$$(5) \quad a^p K_p[c, u] = K_p[c, a u]$$

2) que si $K[z]$ a une « variation » d'ordre n pour $z = c$ correspondant à a et u , $K[z]$ a aussi une variation généralisée d'ordre n pour $z = c$, correspondant aux mêmes a et u .

Mais nous avons donné

un exemple de $K[z]$

possédant pour $z = c$ une « variation généralisée » correspondant à a et u sans avoir une variation du même ordre, pour $z = c$, correspondant aux mêmes a et u

et un exemple d'un $K[z]$ possédant

une variation pour $z = c$, sans avoir pour $z = c$, une « différentielle » du même ordre, quels que soient a et u .

Dés lors, si nous représentons par D, V, G la famille des fonctionnelles $K[z]$ qui pour $z = c$ et pour le même ordre, ont respectivement une différentielle, ou une « variation » correspondant à a et u , ou une « variation généralisée » correspondant à a et u et ceci quels que soient a et u , on aura

$$D \subset V \subset G,$$

formules pour lesquelles on doit préciser que ces trois familles sont *distinctes*.

CONDITIONS NÉCESSAIRES. — On peut aussi démontrer les théorèmes suivants

Pour que $K[z]$ ait un extremum pour $z = c$,

il faut que la « variation » première généralisée de $K[z]$ pour $z = c$, et correspondant à α et u , soit nulle quels que soient $|\alpha|$ assez petit et u . D'après ce qui précède, le théorème reste exact en remplaçant la « variation généralisée » par la « variation ».

Il peut arriver que, non seulement $K_1[c, u]$ mais aussi $K_2[c, u]$, ... jusqu'à un certain ordre n (non compris) soient nuls pour au moins un vecteur u_0 . Alors

$$K[c + \alpha u_0] - K[c] = \alpha^n \{K_n[c, u_0] + \varepsilon_n[c, u_0, \alpha]\}$$

Par hypothèse, $K_n[c, u_0] \neq 0$. Donc pour $|\alpha|$ assez petit l'accolade sera du signe de $K_n[c, u_0]$ et par suite, le premier membre, comme le second changera de signe avec α , si n est impair. Dès lors, dans ce cas, $K[z]$ ne pourra avoir un extremum local pour $z = c$.

Si donc $K[z]$ a un *extremum local* pour $z = c$, n doit être pair: $n = 2p$, et alors on voit que si cet extremum est un maximum, $K_{2p}[c, u]$ devra être ≥ 0 quel que soit u et si c'est un minimum, $K_{2p}[c, u]$ devra être ≤ 0 , quel que soit u .

CONDITIONS SUFFISANTES. — Soient c et Δc deux éléments de B , ($\|\Delta c\| \neq 0$), et soit α un nombre $\neq 0$; le vecteur $u = \frac{1}{\alpha} \Delta c$ appartiendra à B , avec $\|u\| \neq 0$; supposons

$$(6) \quad K_1[c, \Delta c] = \dots = K_{n-1}[c, \Delta c] = 0 \quad \text{et} \quad K_n[c, \Delta c] \neq 0,$$

D'après (3), (4) et (5), on aura

$$K[c + \Delta c] - K[c] = K_n[c, \Delta c] + \|\Delta c\|^n \omega_n[c, \Delta c].$$

On a vu que si n est impair, $K[z]$ n'a pas d'extremum local pour $z = c$.

Supposons alors n pair ($n = 2p$). On obtiendra une condition suffisante quand $K[z]$ possède la propriété P_n : $\omega_n[c, \Delta c]$ converge *uniformément* vers zéro quand $\|\Delta c\| \rightarrow 0$.

Alors si les $2p - 1$ quantités $K_q[c, \Delta c]$ sont nulles, quel que soit $\|\Delta c\|$ assez petit, jusqu'à l'ordre $2p$ exclu et si $K[z]$ a

la propriété P_n , alors $K[z]$ a un extremum strict local pour $z = c$. C'est un maximum pour $K_{2p}[c, \Delta c] > 0$, un minimum pour $K_{2p}[c, \Delta c] < 0$.

Pour abréger, nous renvoyons aussi à I pour ce que nous y avons appelé le « cas douteux », généralement non traité dans les ouvrages sur le calcul des variations classiques.

-
- [I] *Le problème de l'existence d'un extremum local d'une fonctionnelle*,
Ann. École Norm. Sup., 1955, p. 93-119.
- [II] *Existence de la différentielle d'une intégrale du Calcul des Variations*,
C. R., tome 240, 1955, p. 2036.
-

Problemi di Lagrange con vincoli unilaterali.

Riassunto. — *Si espongono recenti risultati di Pontryagin, Filippov, e di altri (parte B) sui problemi di Lagrange con vincoli unilaterali (problemi di controllo ottimo). Si enuncia un teorema esistenziale dell'autore. Precedono brevi cenni sulla teoria della programmazione (parte A).*

Negli ultimi anni sono stati studiati sistematicamente problemi di massimo e di minimo con vincoli unilaterali in relazione ad importanti applicazioni tecniche. Corrispondentemente, nuovi metodi sono stati escogitati per la loro risoluzione, e nuove interessanti teorie si sono definitivamente inserite nelle odierne scienze matematiche.

Nella presente esposizione mi propongo di esporre brevemente alcuni risultati della recente teoria sui problemi di Lagrange del calcolo delle variazioni con vincoli unilaterali, o problemi di controllo ottimo (parte B). A scopo di chiarificazione premetto un brevissimo cenno sui problemi di massimo e minimo finiti con vincoli unilaterali che rientrano nella ora estesissima teoria della programmazione (parte A).

A) PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO FINITI CON VINCOLI UNILATERALI

GENERALITÀ.

A cominciare dal 1940 si è sviluppata una teoria, che ha ricevuto dapprima vari nomi, ma che ora, specialmente in Economia Matematica, è nota come teoria della programma-

zione di attività interdipendenti, o semplicemente, programmazione. Tale teoria è stata motivata da un gran numero di diversi problemi quali ad esempio: problemi di ottima produttività di un complesso di macchine, problemi di trasporto, conservazione e distribuzione di prodotti, problemi di ottimo uso di carburanti, problemi di ottima allocazione di mano d'opera, possibilmente con l'uso dell'intera mano d'opera esistente. In ogni pianificazione sociale, economica e industriale si incontreranno problemi di tale natura.

Per rendersi conto come vincoli unilaterali debbano incontrarsi necessariamente basti pensare a questi pochi esempi: l'utilizzazione giornaliera in ore di una macchina o un gruppo di macchine dovrà essere espressa da un numero compreso tra zero e 24; la velocità di un mezzo di trasporto o il regime di una macchina devono essere contenuti tra limiti ben determinati e non debbono superare i massimi per cui tali macchine e mezzi furono costruiti; le percentuali dei vari componenti di una miscela debbono essere numeri compresi tra zero ed uno. Solo per semplicità ci limitiamo qui a problemi lineari.

Un tipico problema matematico della teoria della programmazione è il seguente: Determinare il massimo di una forma lineare

$$(1) \quad z = f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n,$$

quando le variabili $x_1, \dots, x_n$ soddisfano relazioni del tipo

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i, & i &= 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Tutte le costanti a_{ij} , b_i , c_j e le variabili x_j sono reali. Una n.upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ si dirà *ammissibile* se soddisfa le relazioni (2), una n.upla ammissibile x^0 si dirà *ottimale* se dà il massimo di z , cioè, $f(x^0) = z_{\max} = \delta$. In generale, si dovrà prima di tutto accertare che le condizioni (2) sono compatibili, cioè, esistono n.uple x ammissibili, e, successivamente, si dovrà

accertare che $z = f(x)$ ammette un massimo finito tra tutte le n -uple x ammissibili, cioè, esistono n -uple x ottimali.

Si noti che le prime relazioni (2) possono essere scritte in forma di uguaglianze mediante l'uso di variabili ausiliarie y_i così che il problema (1), (2) diventa:

$$\begin{aligned} z &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \text{massimo}, \\ a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n + y_i &= b_i, & i &= 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j &= 1, \dots, n, & y_i &\geq 0, & i &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Come un esempio del problema (1), (2), si potrà pensare z come il profitto totale nella vendita di certi prodotti $P_1, \dots, P_n$ di cui si possono produrre quantità $x_1, \dots, x_n$ giornaliere mediante l'uso di certe macchine $M_1, \dots, M_m$ di cui sono dati i relativi tempi di lavorazione. Allora a_{ij} sarà il tempo di lavorazione in ore necessario per la lavorazione alla macchina M_i del prodotto P_j , c_j sarà il prezzo di mercato del prodotto finito P_j , e si prenderà ad esempio $b_i = 24$.

È ben evidente che le relazioni (2), se compatibili, determinano un poliedro Γ chiuso, ma non necessariamente compatto, nello spazio euclideo E_n , e che il massimo di z certo esiste se Γ è compatto. D'altra parte, non è difficile dimostrare che il massimo di z , se esiste, è assunto in almeno un vertice di Γ , così che basterebbe saper determinare tutti i vertici di Γ e i corrispondenti valori di z per risolvere il problema. Tuttavia, questo problema è solo apparentemente elementare, perchè la determinazione di tutti i vertici di Γ è praticamente impossibile già per m ed n di poco al di sopra di 2 o 3.

La teoria, che deve la sua iniziale motivazione alle ricerche in economia matematica di W. W. Leontief [13] e di J. von Neumann [18, 19], fu sviluppata prima di tutto da B. G. Dantzig [7, 8] e successivamente da un gran numero di studiosi tra cui citiamo A. W. Tucker, W. W. Cooper, D. Gale, M. Gerstenhaber, A. J. Goldman, T. C. Koopmans, L. V. Kantorovich, M. V. Gavarin, V. A. Zalgaller, H. W. Kuhn. Rimando alle brevi e lucide esposizioni di C. Bussi [6] e di S. Ricossa [20] in Italia,

e alle estese esposizioni apparse all'estero tra cui cito soltanto per brevità quelle di W. T. Baumol [4], D. Gale [9], S. Karlin [12], S. Vajda [21], E. Burger [5], L. V. Kantorovich [10, 11], e V. S. Nemcinov [17]. Tutte queste esposizioni, insieme alle altre raccolte [1, 2, 3, 14, 15, 16], mettono in luce altresì le profonde connessioni della teoria della programmazione con altre aree di ricerca matematica (operations analysis, game theory, management).

Un metodo semplice e pratico per la determinazione del massimo di z nel problema sopra menzionato è dovuto a G. B. Dantzig (simplex method, [8]) in connessione con l'uso dei moltiplicatori Lagrangiani e di considerazioni teoriche di cui diamo un cenno più sotto. Rimandiamo per il metodo di G. B. Dantzig alle esposizioni [6, 20, 21] e alle altre già citate. La letteratura concernente tale metodo è amplissima. Essa comprende i numerosi e adeguati artifici che sono stati escogitati dal Dantzig e da altri per superare i così detti casi di degenerazione del metodo. Altri metodi sono stati proposti per la determinazione del massimo di z da J. von Neumann (Nav. Research Logist. Quart., vol. 1, 1954, pp. 109-115), da L. V. Kantorovich (Doklad. Akad. Nauk SSSR, vol. 115, 1957, pp. 441-444), da V. A. Bulaskii (Doklad. Akad. Nauk SSSR, vol. 137, 1961, pp. 258-260, trad. ingl. in Sov. Math. Dokl., vol. 2, pp. 250-252), e da altri. Per la discussione di problemi particolari si vedano, ad esempio, oltre alle esposizioni citate, T. C. Koopmans (Econometrica, vol. 17, 1949), G. B. Dantzig ([14], pp. 359-373), M. M. Flood (Pacific Journ. Math., vol. 3, 1953, pp. 369-386), W. Prager (J. Math. Phys., vol. 36, 1957, pp. 99-106).

IL PRINCIPIO DI DUALITÀ E I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.

Ci preme qui di dare soltanto un breve cenno alla base non elementare della teoria. Anzitutto occorre ricordare un teorema che, nella sua forma più generale, è dovuto ad Herman Weyl [22] e che include una proprietà notata essenzialmente da Minkowski.

Teorema (Minkovski, Weyl): Se C è un cono convesso poliedrale in E_n di dimensione n (dunque C è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di n semirette uscenti dall'origine e corrispondenti ad n vettori indipendenti), allora C è anche l'intersezione di un numero finito di semispazi di E_n ciascuno contenente almeno $n-1$ punti linearmente indipendenti di C .

La dimostrazione corrente di tale teorema non è elementare. Una forma analitica spesso usata e di poco più debole è la seguente: La relazione $b'u \geq 0$ vale per tutti i vettori $u \geq 0$ soddisfacenti un sistema di disuguaglianze lineari $A'u \geq 0$ solo e soltanto se $b = Ax$ per qualche $x \geq 0$. Si veda H. Weyl [22], e inoltre D. Gale ([9] e [14], pp. 287-297), M. Gerstenhaber ([14], pp. 298-316), D. Gale, H. W. Kuhn e A. W. Tucker ([14], pp. 317-329).

Prima di procedere, richiamiamo il significato dei simboli qui usati. Per un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ le notazioni $x = 0$, $x \geq 0$, $x > 0$ significano rispettivamente che $x_j = 0$, $x_j \geq 0$, $x_j > 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Pertanto $x \geq 0$, $x \neq 0$ significa che $x_j \geq 0$ per ogni j e che $x_j > 0$ per almeno un j . Conseguentemente, se x, y sono due vettori (reali) con lo stesso numero di componenti, le notazioni $x = y$, $x \geq y$, $x > y$, significano rispettivamente $x - y = 0$, $x - y \geq 0$, $x - y > 0$. Se $A = [a_{ih}]$ è una matrice di tipo (m, n) , allora A' denota la matrice trasposta di tipo (n, m) . Pertanto, se $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ sono due vettori, allora $b'c = b_1c_1 + \dots + b_nc_n$ è il solito prodotto interno. Con queste notazioni il problema (1), (2) si riduce a determinare il massimo di $z = c'x$ per tutti i vettori $x \geq 0$ tali che $Ax \leq b$. Le stesse notazioni di cui sopra valgono per matrici A, B di qualsiasi tipo (m, n) . Pertanto le notazioni $A = 0$, $A \geq 0$, $A > 0$, significano rispettivamente che tutti gli elementi della matrice A sono $= 0$, oppure ≥ 0 , oppure > 0 . Consideriamo ora una classe K di vettori y dello stesso tipo. Un vettore x si dirà massimale [minimale] in K se $x \in K$ e se $x \geq y$ per ogni vettore $y \in K$ [rispettivamente $x \leq y$]. Analogamente, data una classe K di matrici B dello stesso tipo, si dirà

che A è massimale in K [minimale] se $A \in K$ e se $A \geq B$ [$A \leq B$] per ogni matrice $B \in K$.

Veniamo ora al concetto di problemi duali del tipo (1), (2), e corrispondenti generalizzazioni. Denoteremo con A una matrice di tipo (m, n) , e con x, u vettori ad m ed n componenti. I due problemi (α) , (β) seguenti si dicono *duali* l'uno dell'altro:

(α) Determinare il massimo di $z = c'x$ per tutti i vettori $x \geq 0$ tali che $Ax \leq b$. In altre parole, determinare uno scalare δ massimale tale che $c'x \geq \delta$ per qualche $x \geq 0$ con $Ax \leq b$.

(β) Determinare il minimo di $\chi = b'u$ per tutti i vettori $u \geq 0$ tali che $A'u \geq c$. In altre parole, determinare uno scalare δ minimale tale che $b'u \leq \delta$ per qualche $u \geq 0$ con $A'u \geq c$.

TEOREMA DI DUALITÀ: I due problemi (α) e (β) hanno la stessa soluzione δ , oppure nessuno dei due ha soluzione. (Si veda, ad esempio, D. Gale [9], D. Gale, H. W. Kuhn ed A. W. Tucker [14], pp. 317-329, A. J. Goldman ed A. W. Tucker [15], pp. 53-98).

Queste considerazioni possono generalizzarsi come segue. Si denotino con A, B, C, D matrici dei tipi (m, n) , (m, q) , (p, n) , (p, q) , e con x, y, u, v vettori ad n, q, m, p componenti ciascuno. I due problemi seguenti si dicono duali l'uno dell'altro:

($\alpha\alpha$) Determinare una matrice massimale D tale che $Cx \geq Dy$ per qualche $x \geq 0, y > 0$ con $Ax \leq By$.

($\beta\beta$) Determinare una matrice minimale D tale che $B'u \leq D'v$ per qualche $u \geq 0, v > 0$ con $A'u \geq C'v$.

Ovviamente, se $p = q = 1$, cioè $B = b, C = c'$, allora $D = \delta$ è uno scalare, e i problemi ($\alpha\alpha$), ($\beta\beta$) si riducono ai problemi (α), (β) visti sopra.

Un teorema di dualità più generale del precedente (D. Gale, H. W. Kuhn ed A. W. Tucker [14], pp. 317-329) afferma che i due problemi ($\alpha\alpha$) e ($\beta\beta$) hanno la stessa soluzione D , oppure nessuno dei due ha soluzione.

Limitandoci ai problemi (α) , (β) , possiamo metterne in maggior luce il carattere duale mediante le seguenti considerazioni. I problemi (α) e (β) hanno la stessa funzione Hamiltoniana $H(x, u)$ sotto indicata. Di più, le componenti u_i del vettore $u = (u_1, \dots, u_m)$ sono i moltiplicatori di Lagrange del problema (α) , e le componenti x_j del vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ sono i moltiplicatori di Lagrange del problema (β) . Infatti:

$$\begin{aligned} H(x, u) &= \\ &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + u_1 (b_1 - \sum a_{1j} x_j) + \dots + u_m (b_m - \sum a_{mj} x_j) = \\ &= b_1 u_1 + \dots + b_m u_m + x_1 (c_1 - \sum a_{i1} u_i) + \dots + x_n (c_n - \sum a_{in} u_i). \end{aligned}$$

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente affinché x^0 sia ottimale per il problema (α) è che u^0 sia ottimale per il problema duale (β) , e allora (x^0, u^0) è un punto sella per la funzione di Hamilton $H(x, u)$ nel senso che

$$H(x, u^0) \leq H(x^0, u^0) \leq H(x^0, u)$$

per ogni vettore $x \geq 0$ soddisfacente $Ax \leq b$, e per ogni vettore $u \geq 0$ soddisfacente $A'u \geq c$, ossia, brevemente,

$$\max_x H(x, u^0) = H(x^0, u^0) = \min_u H(x^0, u),$$

Inoltre $H(x^0, u^0)$ è il valore massimo di z per il problema (α) e il valore minimo di χ per il problema (β) , cioè

$$z_{\max} = H(x^0, u^0) = \chi_{\min} = \delta.$$

(Si veda, ad esempio, A. J. Goldman ed A. W. Tucker [15], pp. 53-98).

La teoria di cui abbiamo dato solo pochissimi cenni, e i metodi per la determinazione delle soluzioni ottimali, si estendono in gran parte a problemi di programmazione non lineare. Rimandiamo per queste estensioni alle monografie già citate, ad esempio, [2], [4], [12], [21], e ai lavori originali, in particolare: J. Abraham (Econometrica 29, 1961, pp. 200-203), E. W. Barankin ed R. Dorfman (Univ. of Calif. Publ. in Statist.,

vol. 2, 1958, pp. 285-318), M. Frank e P. S. Wolfe (Naval Research Logist. Quart., vol. 3, 1956, pp. 95-110), H. W. Kuhn ed A. W. Tucker, Proc. Second Berkeley Sympos. Math. Statist. Probl., Univ. of Calif. Press 1951, pp. 481-492), H. Markowitz (Nav. Research Logist. Quart., vol. 3, 1956, pp. 111-133), A. W. Tucker, Operations Research, vol. 5, 1957, pp. 244-257), P. Wolfe (Econometrica, vol. 27, 1959, pp. 382-398), P. Wolfe (Quart. Appl. Math., vol. 19, 1961, pp. 239-244), P. Wolfe (Journ. Soc. Industr. Appl. Math., vol. 9, 1961, pp. 481-488).

B) PROBLEMI DI LAGRANGE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI CON VINCOLI UNILATERALI

GENERALITÀ.

Passiamo ora a problemi con vincoli unilaterali in qualche modo analoghi ai precedenti, ove gli elementi da determinarsi sono funzioni $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ del tempo t , e ove si tratterà di determinare il massimo o il minimo di un funzionale $I[x(t)]$ dipendente dalle stesse funzioni $x_j(t)$, cioè dal vettore funzione $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$.

Per quanto riguarda i problemi di carattere economico, tecnico, e industriale che effettivamente hanno condotto a tali questioni, sarà opportuno usare lo stesso linguaggio adoperato all'inizio della parte (A). Si tratterà allora di determinare la migliore possibile *strategia* nell'utilizzazione nel tempo di un gruppo di macchine, o di certi mezzi di trasporto, o di mano d'opera, o altro. Ad esempio, il problema dell'ottima strategia per porre un satellite in orbita con il minimo uso di carburante condurrà a questioni di tale natura.

In generale, si tratterà di minimizzare un « costo » I , o di massimizzare un « profitto », dipendente da certe funzioni $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, ove gli istanti iniziale t_1 e finale t_2 possono essere fissi o indeterminati. Il costo I potrà essere ad esempio il valore finale $x_1(t_2)$ di una delle variabili, o una conveniente combinazione lineare $c_1 x_1(t_2) + \dots + c_n x_n(t_2)$ dei valori

finali di un certo numero di variabili, o più in generale, potrà essere una data funzione

$$(5) \quad I = G[t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)]$$

dei valori iniziali e finali delle n variabili x_i e dei tempi t_1 e t_2 . Potrà accadere altresì che il costo I sia un integrale

$$(6) \quad I = \int_{t_1}^{t_2} f_0[t, x(t), x'(t)] dt$$

dipendente dalle funzioni $x_i(t)$ e dalle loro derivate prime nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$, e finalmente I potrà essere una espressione del tipo

$$(7) \quad I = G[t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} f_0[t, x(t), x'(t)] dt.$$

I vincoli saranno rappresentati, per esempio, da date condizioni iniziali e finali, da equazioni in termini finiti o differenziali da soddisfare ad ogni istante

$$(8) \quad F_i[t, x(t)] = 0, \quad G_i[t, x(t), x'(t)] = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

e da disuguaglianze finite o differenziali

$$(9) \quad F_i[t, x(t)] \geq 0, \quad G_i[t, x(t), x'(t)] \geq 0.$$

È ben evidente che le espressioni (5), (6), (7) sono le tipiche espressioni dei problemi di Mayer, Lagrange, e Bolza del calcolo delle variazioni, e che tutte le ben note trasformazioni con cui ciascuno di tali problemi può essere ridotto agli altri due, si potranno ancora utilizzare. Di più, il funzionale I , o ciascuna delle funzioni G_i , potrà dipendere da derivate di ordine superiore al primo, ma tutte le derivate di ordine superiore al primo possono essere eliminate mediante l'introduzione di variabili ausiliarie e di nuove equazioni differenziali. Di più, persino le derivate del primo ordine che appaiono nell'espressione di I e nei vincoli unilaterali $G_i \geq 0$ possono analogamente essere eliminate con l'introduzione di variabili ausiliarie y_j e relative nuove equazioni differenziali $y_j = x'_j$. È evidente

che ci dovremo servire di tutti questi e altri artifici per ridurre un dato problema a qualche problema tipico, per cui la teoria è conosciuta.

Uno di tali problemi è il problema di Pontryagin che viene descritto più sotto. Tale problema non è il più generale possibile, ma è importante perchè per esso il Pontryagin ha dimostrato il suo « principio di massimo » che verrà enunciato. In tale schematizzazione le variabili sono separate in due gruppi, certe variabili $u = (u_1, \dots, u_m)$ pensate come rappresentanti la posizione istantanea di un *regolatore*, e certe altre variabili $x = (x_1, \dots, x_n)$ pensate come rappresentanti la posizione istantanea, o « stato », del sistema fisico o meccanico e perciò meglio assimilabili a coordinate lagrangiane. Nella schematizzazione di Pontryagin le coordinate u sono le sole che debbono soddisfare vincoli unilaterali, le coordinate x possono assumere valori arbitrari ma debbono soddisfare un sistema di altrettante equazioni differenziali del primo ordine in forma normale.

Si noti che se imponiamo alle u di soddisfare disuguaglianze lineari

$$a_{i1}u_1 + \dots + a_{im}u_m \leq b_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

allora queste relazioni definiscono un poliedro I' dello spazio delle u , e tali vincoli unilaterali possono semplicemente essere espressi da una relazione di appartenenza $u \in I'$. Più in generale, se imponiamo alle u di soddisfare disuguaglianze del tipo

$$G_i(u) \geq 0, \quad i = 1, \dots, M,$$

allora queste relazioni definiscono un insieme U dello spazio delle u e i vincoli sono rappresentati dalla relazione $u \in U$. Come ulteriore generalizzazione potremo prendere per U un insieme arbitrario e imporre il vincolo $u \in U$.

Si noti che se imponessimo alle u di soddisfare disuguaglianze del tipo $G_i(t, x, u) \geq 0$, $i = 1, \dots, M$, allora queste relazioni definirebbero un insieme variabile $U(t, x)$ dello spazio delle u e i vincoli sarebbero espressi dalla relazione $u \in U(t, x)$

(vincoli unilaterali dipendenti dal tempo e dalle coordinate « lagrangiane » x). Finalmente, si potrebbe pensare $U(t, x)$ come un insieme variabile arbitrario dello spazio delle u .

IL PROBLEMA DI PONTRYAGIN.

Sia t la variabile indipendente, $t \in E_0 = [t_1, +\infty)$, e sia $u = (u_1, \dots, u_m)$ un vettore variabile rappresentante la posizione istantanea del regolatore, e i cui valori u debbono appartenere ad un dato insieme fisso dello spazio E_m , ossia

$$(10) \quad u \in U.$$

Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vettore variabile rappresentante la posizione istantanea del sistema e con valori arbitrari $x \in E_n$. Sia $f(t, x, u) = (f_1, \dots, f_n)$ un vettore funzione di (t, x, u) continuo rispetto a (t, x, u) nell'insieme $E_0 \times E_n \times U$. Indichiamo con $K = \{u(t)\}$ la classe delle funzioni vettore $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_2$, aventi le seguenti proprietà: (i) $u(t) \in U$ per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$; (ii) $u(t)$ è misurabile in $[t_1, t_2]$; il sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

$$dx_i/dt = f_i[t, x_1, \dots, x_n, u_1(t), \dots, u_m(t)], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$t_1 \leq t \leq t_2,$$

ossia

$$(11) \quad dx/dt = f[t, x, u(t)], \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

ammette una soluzione $x = x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ a componenti $x_i(t)$ assolutamente continui in $[t_1, t_2]$ soddisfacenti le (11) quasi dappertutto, e certe condizioni iniziali e finali

$$x(t_1) = x_{10} = (x_{11}, \dots, x_{n1}), \quad x(t_2) = x_{20} = (x_{12}, \dots, x_{n2}),$$

ossia

$$(12) \quad x_i(t_1) = x_{i1}, \quad x_i(t_2) = x_{i2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per il momento assumiamo t_1 , x_{10} , x_{20} come dati, e t_2 come indeterminato.

Ogni vettore funzione $u(t)$ della classe K si dirà una *strategia*, o anche una *strategia ammissibile*. Il vettore funzione $x(t)$ con valori in E_n si dirà allora una *traiettoria* corrispondente alla strategia $u(t)$, e i punti x_{10} e x_{20} dello spazio E_n si diranno i punti iniziale e finale della traiettoria. Il punto x_{20} si dirà anche il *bersaglio*. Un punto $x_{20} \in E_n$ si dirà *accessibile* partendo dal punto x_{10} al tempo t_1 e nel tempo t_2 (o semplicemente accessibile) se esiste una strategia $u(t) \in K$, $t_1 \leq t \leq t_2$ e corrispondente traiettoria $x(t)$ tale che $x(t_1) = x_{10}$, $x(t_2) = x_{20}$. Tenendo fissi t_1 e x_{10} considereremo l'insieme R dei punti x_{20} che sono accessibili in un qualsiasi tempo $t_2 \geq t_1$ (partendo dal punto x_{10} al tempo t_1). L'insieme R non è vuoto perchè R contiene x_{10} .

Assumeremo ora che una funzione scalare $f_0(t, x, u)$ è data, anch'essa continua in $E_0 \times E_n \times U$, e dobbiamo solo richiedere — restringendo la classe K se necessario — che $f_0[t, x(t), u(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_2$, risulti L -integrabile in $[t_1, t_2]$ per ogni $u(t) \in K$ e corrispondente traiettoria $x(t)$. Allora l'integrale di Lebesgue

$$I[u] = \int_{t_1}^{t_2} f_0[t, x(t), u(t)] dt$$

si dirà il *costo* corrispondente alla strategia $u(t) \in K$.

Il problema di Pontryagin consiste nel determinare, se possibile, una strategia ammissibile $u(t)$ (cioè $u(t) \in K$) per cui $I[u]$ assume il suo minimo valore.

Il problema ora enunciato può dirsi un problema di Lagrange con vincoli rappresentati dalle n equazioni differenziali (11) in forma normale, dalle condizioni iniziali e finali (12), e dai vincoli « unilaterali » (10) nella forma astratta $u(t) \in U$, ove U è un dato insieme fisso e arbitrario dello spazio E_m , e perciò questi ultimi sono vincoli finiti indipendenti dal tempo t e dalla posizione $x = x(t) \in E_n$ del punto x lungo la traiettoria. Ricordiamo che l'insieme U è chiamato talvolta lo *spazio dei controlli*.

Il problema ora enunciato fu proposto e studiato da L. S. Pontryagin [43] e poi discusso ulteriormente dal Pontryagin

stesso e dai suoi collaboratori [44] R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, V. G. Boltyanskii. Successivamente, un gran numero di matematici si sono occupati di questo problema e sue generalizzazioni. Citiamo qui ad esempio L. I. Rozonoer, N. N. Krasovskii, A. F. Filippov, H. A. Antosiewicz, J. P. La Salle, L. Markus, E. B. Lee, E. Roxin. Il problema di Pontryagin è soltanto un esempio tra i problemi essenzialmente di calcolo delle variazioni con vincoli unilaterali che si sono presentati in questioni tecniche come si è detto avanti. Tali problemi sono indicati di solito come *problemi di controllo ottimo*. La bibliografia al termine di questa esposizione intende solo indicare alcuni dei lavori più significativi. Si veda [45] per una amplissima bibliografia.

Il problema di Pontryagin che è stato enunciato avanti come un problema del tipo di Lagrange, può essere posto naturalmente come un problema del tipo di Mayer. Infatti si ponga

$$(13) \quad x_0(t) = \int_{t_1}^t f_0[t, x(t), u(t)] dt,$$

e si considerino i vettori a $n + 1$ componenti $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$. Il problema di Pontryagin si esprime allora nel modo seguente: Determinare la strategia $u(t) \in K$ così che per la soluzione $\tilde{x}(t)$ del sistema differenziale di ordine $n + 1$ in forma normale

$$(14) \quad d\tilde{x}/dt = \tilde{f}[t, x, u(t)],$$

con condizioni iniziali

$$(15) \quad x_i(t_1) = x_{i1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_0(t_1) = 0,$$

risulti

$$(16) \quad x_i(t_2) = x_{i2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_0(t_2) = \text{minimo}.$$

In questa forma si tratta di un problema del tipo di Mayer con vincoli unilaterali $u(t) \in U$ (finiti, indipendenti da t ed x).

È ben evidente che, se assumiamo $f_0 = 1$, allora il costo si riduce ad $I[u] = t_2 - t_1$, con t_1 fisso, e perciò il minimo di $I[u]$ si riduce al minimo tempo $t_2 - t_1$ richiesto per raggiungere un dato punto x_{20} (problema del minimo tempo). Tornando al problema generale di Pontryagin, se assumiamo invece t_2 fisso, $t_2 > t_1$, e perciò t_1, t_2, x_{10}, x_{20} come dati, allora si tratterà di un problema di minimo con estremi fissi.

IL PRINCIPIO DI MASSIMO.

Passiamo ora ad enunciare il teorema (principio di massimo) dimostrato prima da Pontryagin per il caso lineare e poi da Pontryagin insieme ai suoi collaboratori Gamkrelidze e Boltyanskii per il problema dianzi enunciato.

Denoteremo con $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ un vettore reale variabile e con H la funzione Hamiltoniana

$$(17) \quad H(t, x, u, p) = p_0 f_0 + p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = \sum_{j=0}^n p_j f_j(t, x, u).$$

Per ogni t, x, p considereremo H come una funzione di u soltanto e porremo

$$(18) \quad M(t, x, p) = \sup_{u \in U} H(t, x, u, p).$$

Teorema (Pontryagin): Supponiamo che le funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, siano continue con le loro derivate parziali prime rispetto a $t, x_1, \dots, x_n$. Supponiamo che il problema di Pontryagin ammetta una strategia ottimale $u = u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $u(t) \in K$, e che l'insieme dei valori $u = u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, sia un sottoinsieme di U con chiusura compatta (in particolare, se U è compatto). Allora esiste un sistema di moltiplicatori reali assolutamente continui $p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_2$, tali che

$$(19) \quad \frac{dx_i}{dt} = \partial H / \partial p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \partial H / \partial x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(20) \quad M[t, x(t), p(t)] = H[t, x(t), u(t), p(t)],$$

$$(21) \quad p_0 \leq 0 \text{ è una costante, } p(t) \text{ non è mai zero,}$$

$$(22) \quad H[t, x(t), u(t), p(t)] = \int_{t_2}^t \sum_{i=0}^n p_i(\tau) (\partial f_i[\tau, x(\tau), u(\tau)] / \partial \tau) d\tau,$$

ove le relazioni (19), (20), (22) valgono quasi ovunque in $[t_1, t_2]$. Se nel problema di Pontryagin consideriamo t_2 fisso, allora il primo e il secondo membro della relazione (22) potranno differire per una costante. Se le funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n$ non dipendono esplicitamente dal tempo allora la relazione (22) si riduce a $H = 0$ se t_2 come sopra è indeterminato, e a $H = \text{costante}$ se t_2 è fisso.

Le relazioni (19) sono le equazioni canoniche del calcolo delle variazioni, e si vede subito che le prime n sono ancora le equazioni differenziali date (11). La relazione (20) afferma che ad ogni istante la funzione Hamiltoniana assume il suo minimo valore in corrispondenza al tempo t , al punto $x(t)$ sulla traiettoria e al valore $p(t)$ dei moltiplicatori all'istante t . La relazione (20) nonostante la forma, che è nuova, esprime essenzialmente la condizione di Weierstrass. La relazione (22) è ben nota nel calcolo delle variazioni quando si usi la funzione Hamiltoniana. La seconda delle relazioni (21) è anche ben nota nel calcolo delle variazioni. Nei riguardi della prima delle relazioni (21) sono necessari alcuni commenti. Prima di tutto si noti che si potrebbero aggiungere alle (19) due altre relazioni corrispondenti al valore $i = 0$ dell'indice i . Allora la prima delle relazioni (19) con $i = 0$ si ridurrebbe all'introduzione della variabile ausiliaria $x_0(t)$, come si è fatto avanti mediante la (13), e la seconda si ridurrebbe a $dp_0/dt = 0$, dato che H non dipende da x_0 , e pertanto si otterrebbe $p_0 = \text{costante}$ come è appunto affermato dalla prima delle relazioni (21). Il segno $p_0 \leq 0$ è una convenzione. Infatti si vede che un vettore $p(t)$ soddisfacente le relazioni (19-22) può essere moltiplicato per una costante positiva arbitraria. D'altra parte, assu-

mendo la convenzione opposta $p_0 \geq 0$ si dovrebbe soltanto definire M come lo infimum di H per $u \in U$ al posto della (18), e allora il teorema di Pontryagin sarebbe enunciato come un principio di minimo. La convenzione fatta nell'enunciato sopra riportato ($p_0 \leq 0$, $M = \sup H$, principio di massimo) ha lo scopo, in armonia con Pontryagin, di preservare la proprietà di massimo di H dell'ultimo teorema della parte A. Si noti che per il massimo del funzionale I si debbono fare le convenzioni opposte.

Dal punto di vista teorico, l'interesse del principio, e perciò del contributo del Pontryagin, risiede prima di tutto nel fatto che — nelle condizioni assunte — le relazioni fondamentali del calcolo delle variazioni, in forma Hamiltoniana, valgono ancora nonostante la presenza dei vincoli unilaterali espressi da $u \in U$ (con U indipendente da t e da x) e tali vincoli non appaiono esplicitamente nell'enunciato.

Per una analisi delle relazioni (19-22) e una dimostrazione del principio rimandiamo ai lavori del Pontryagin e collaboratori, e particolarmente [45]. Si veda anche H. Halkin [30] per una elegante e indipendente dimostrazione. Dal punto di vista pratico si deve aggiungere che la specifica forma (19-22) delle relazioni fondamentali del calcolo delle variazioni permette di individuare molto rapidamente la soluzione ottimale in un gran numero di situazioni interessanti. Per numerosi esempi si veda la monografia [45]. Di più, nel caso in cui tutte le funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n$ sono lineari in (x, u) , ulteriori e importanti proprietà delle soluzioni ottimali si possono dedurre dal principio di massimo e daremo più sotto alcune di tali proprietà che sono dovute al Pontryagin.

Tuttavia, in generale, e specialmente quando il numero delle variabili è grande e il problema non è lineare, le proprietà (20-22) non semplificano il problema difficilissimo dell'integrazione delle equazioni canoniche (cioè in ultima analisi delle equazioni di Eulero se queste sono non lineari e con condizioni ad entrambi gli estremi).

Il principio di Pontryagin, nonostante la sua generalità e il suo interesse, è poi soltanto una condizione necessaria per una strategia ottimale. Come si è detto, il principio afferma soltanto che una strategia ottimale deve soddisfare — con convenienti notazioni e terminologia — le condizioni necessarie del calcolo delle variazioni. Condizioni sufficienti sono state date da Boltyanskii, ed esse pure sono estensioni delle condizioni sufficienti dei problemi usuali di calcolo delle variazioni (Bolza). Naturalmente, tali condizioni sono di qualche aiuto ancora più raramente che nel caso classico, a causa delle ben note difficoltà di verificarne le ipotesi (costruzione di campi, determinazione di fuochi).

Nè il principio, nè le condizioni sufficienti assicurano prima di tutto se il punto, o stato, x_{20} è accessibile dal punto, o stato, x_{10} , cioè se esistono strategie ammissibili, o in altre parole, se si può regolare, o guidare, il sistema partendo dallo stato x_{10} così da condurlo allo stato x_{20} . Questo problema prende il nome di problema della *controllabilità*. Ricorderemo più sotto un teorema di controllabilità per il caso lineare dovuto a Pontryagin. Rimandiamo, per ricerche sul problema della controllabilità, ai lavori di H. A. Antosiewicz [23], H. Halkin [30], e L. Markus ed E. B. Lee [38]. Finalmente, ammesso che esistano strategie ammissibili, non si sa se tra queste ve ne è almeno una che è ottimale, cioè per cui il costo I assume un valore minimo. Questo problema prende il nome di problema dell'*esistenza* di una soluzione ottimale. Ricorderemo più sotto il teorema esistenziale di A. F. Filippov, con le relative varianti di L. Markus ed E. B. Lee e di E. Roxin, e un ulteriore teorema esistenziale dell'autore.

La dimostrazione del principio di massimo nelle condizioni assai generali dell'enunciato richiede grande cura. Ad esempio, si pensi che le $u_j(t)$ sono assunte soltanto misurabili e le $x_i(t)$ soltanto assolutamente continue. Abbiamo già rimandato per una dimostrazione — in tali condizioni — alla monografia [45]. Se si considera che la dimostrazione delle equazioni di Eulero, già in problemi liberi del calcolo delle variazioni

(si veda ad esempio [48], II, p. 321, e [49]), richiede grandi cure e non può essere fatta senza l'uso di qualche condizione restrittiva, ci si può domandare quali condizioni hanno permesso al Pontryagin e ai suoi collaboratori di condurre la dimostrazione. È facile convincersi che è la condizione di compattezza contenuta nell'enunciato, quella che permette di condurre la dimostrazione senza altre ipotesi. D'altra parte, i teoremi di esistenza assicurano soltanto la misurabilità delle $u_j(t)$ e l'assoluta continuità delle $x_i(t)$, e pertanto si vede l'interesse per la teoria di dimostrare il principio nella generalità con cui esso è stato appunto dimostrato dal Pontryagin e collaboratori e come lo si è enunciato sopra. Nella difficile dimostrazione del Pontryagin e collaboratori è tra l'altro adoperata una osservazione del McShane [39].

Se, come nel calcolo delle variazioni classico, si assume che le funzioni f_i sono di classe C^2 , che la strategia ottimale esiste ed è definita da funzioni $u_j(t)$ continue con derivate prime continue e derivate seconde continue a tratti, che i vincoli unilaterali fissi $u \in U$ sono sostituiti da vincoli — che ora possono dipendere dal tempo e dallo spazio — della forma $G_i(t, x, u) \geq 0$, $i = 1, \dots, M$, allora, sotto ulteriori condizioni di regolarità, L. D. Berkovitz ha dimostrato che il problema di Pontryagin può ricondursi ad un problema di Lagrange ordinario senza vincoli unilaterali, e il principio di minimo alle solite condizioni necessarie del calcolo delle variazioni. A tale scopo si applica una ben nota osservazione di F. A. Valentine (si veda: F. A. Valentine, The problem of Lagrange with differential inequalities, Contributions to the calculus of variations 1933-1937, pp. 407-448, Univ. of Chicago 1937; L. D. Berkovitz, Variational methods in problems of control and programming, Journ. Math. Anal. Appl., vol. 3, 1961, pp. 145-169). Infatti, introducendo M funzioni ausiliarie $v_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, le disuguaglianze $G_i(t, x, u) \geq 0$ possono essere sostituite dalle M equazioni differenziali ausiliarie

$$G_i(t, x, u) - (dv_i/dt)^2 = 0, \quad i = 1, \dots, M,$$

in analogia con quanto si fa nel caso finito. Si è visto ad esempio, per tale via, come la formulazione del principio di massimo si modifica quando si assuma che i vincoli dipendono dal tempo e dallo spazio. Le condizioni di regolarità che sono state assunte dal Berkowitz per questa riduzione ad un problema di Lagrange ordinario, sono estremamente restrittive e sono infatti violate già in casi molto elementari. Tuttavia, dal punto di vista pratico, è attraverso a tale artificio, o altri analoghi, che alcuni problemi della tecnica con vincoli unilaterali vengono ricondotti allo schema usuale dei problemi di Bolza del calcolo delle variazioni, e praticamente risolti.

IL CASO LINEARE.

Nel caso lineare, cioè $f_0, f_1, \dots, f_n$ tutte lineari in (x, u) , è possibile precisare ulteriormente il principio di massimo con proprietà dei moltiplicatori $p_i(t)$ e delle soluzioni $x_i(t), u_j(t)$, che furono il punto di partenza del Pontryagin, essendo le naturali estensioni di proprietà valide nel caso finito e lineare. Enunciamo qui sotto alcune delle proprietà dimostrate dal Pontryagin [43] per il caso lineare. Ci limitiamo qui al caso lineare autonomo e al problema del minimo tempo. Pertanto

$$\dot{f}_0 = 1, \quad \dot{f}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{s=1}^m b_{is}u_s, \quad i = 1, \dots, n,$$

e perciò

$$\dot{f} = (f_1, \dots, f_n)' = Ax + Bu,$$

ove A, B sono due matrici costanti dei tipi (n, n) ed (n, m) rispettivamente. Le equazioni canoniche (19) si riducono allora alle equazioni lineari a coefficienti costanti

$$(23) \quad dx/dt = Ax, \quad dp/dt = -A'p,$$

ove A' è la matrice trasposta di A . Questi due sistemi lineari ed omogenei sono l'uno l'aggiunto dell'altro.

Supporremo con Pontryagin [43] che U sia un poliedro compatto e fisso dello spazio E_m e avremo bisogno, nelle poche righe seguenti, dell'una o l'altra delle due ipotesi:

(h_1) Ogni vettore non nullo $w \in E_m$ che appartiene ad un qualche spigolo del poliedro compatto U è trasformato dalla matrice B in un vettore $Bw \in E_n$ che non appartiene ad alcun sottospazio invariante R di A in E_n (in altre parole, gli n vettori $Bw, ABw, A^2Bw, \dots, A^{n-1}Bw$ sono linearmente indipendenti in E_n).

(h_2) L'origine o di E_m è un punto interno del poliedro compatto U .

I tre teoremi seguenti possono essere dedotti dal principio di massimo:

Teorema (Pontryagin): Nelle ipotesi di linearità dette sopra e (h_1), ogni soluzione $x(t)$, $p(t)$ delle equazioni canoniche (23) determina univocamente la funzione di controllo $u(t)$, e questa è un vettore funzione costante a tratti e i suoi valori $u(t)$ sono vertici del poliedro compatto U .

Teorema (Pontryagin): Nelle ipotesi di linearità dette sopra e (h_1), ogni soluzione ottimale è unica.

Teorema (Pontryagin): Nelle ipotesi di linearità dette sopra e (h_2), se gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa, l'origine $x_{20} = 0$ di E_n è accessibile da qualsiasi punto x_{10} di E_n ed esiste una corrispondente soluzione ottimale per il problema del minimo tempo.

TEOREMI ESISTENZIALI.

Il metodo diretto del calcolo delle variazioni ha permesso di dimostrare un numero di teoremi esistenziali per il problema dei controlli ottimi, il primo dei quali in ordine di tempo fu dimostrato dallo stesso Pontryagin nel caso lineare ove tutte

le $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, sono funzioni lineari di (x, u) . In tale teorema Pontryagin assumeva che l'insieme U fosse un poliedro Γ convesso fisso e compatto di E_m . Si noti che, in tale situazione, e per ogni (t, x) , il vettore funzione lineare di u , $\tilde{f} = \tilde{f}(t, x, u) = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ trasforma U in un altro poliedro convesso e compatto $\tilde{V}(t, x) = \tilde{f}(t, x, U)$ dello spazio E_n , e naturalmente $\tilde{V}(t, x)$ potrà dipendere da t ed x . Successivamente, A. F. Filippov [27] ha esteso tale teorema al caso generale, ove le funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, sono soltanto continue in (t, x, u) . Di più il Filippov assume che $U = U(t, x)$ è un sottoinsieme compatto di E_m che può dipendere da t ed x , e che $V(t, x) = f[t, x, U(t, x)]$ è un sottoinsieme convesso (e necessariamente compatto) di E_n , per ogni t e per ogni x . L'insieme variabile $U(t, x)$ è supposto allora una funzione semi-continua inferiormente di (t, x) . Precisamente, si assume che per ogni (t, x) ed ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\delta > 0$ tale che per ogni (t', x') con $|t' - t| < \delta$, $\|x' - x\| < \delta$ si abbia $U(t', x') \subset [U(t, x)]_\varepsilon$, l'ultima espressione essendo l'intorno di raggio ε di $U(t, x)$, in E_m . Il teorema esistenziale di Pontryagin è pertanto contenuto in quello di A. F. Filippov che verrà enunciato qui sotto.

Poco dopo Filippov, ma indipendentemente, L. Markus ed E. B. Lee, ed E. Roxin ritrovarono il teorema di Filippov in forme analoghe. Enunceremo più sotto le loro varianti.

Teorema di esistenza I (Filippov [27]): Siano $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, funzioni continue di (t, x, u) per $t \in E_0 = [t_1, +\infty)$, $x \in E_n$, $u \in U(t, x) \subset E_m$, sia $U(t, x)$ un sottoinsieme compatto di E_m per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$, e sia $U(t, x)$ una funzione semi-continua di (t, x) . Si indichi con $\tilde{f}(t, x, u)$ il vettore $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$. Si assuma: (a) $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n \leq C \|x\|^2$ per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$, $u \in U(t, x)$; (b) $f_0(t, x, u) \geq m > 0$ per qualche costante $m > 0$ e ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$, $u \in U(t, x)$; ($\tilde{\gamma}$) per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ l'insieme $\tilde{V}(t, x) = \tilde{f}[t, x, U(t, x)]$ è un sottoinsieme convesso di E_{n+1} . Siano t_1 un tempo fisso, e x_{10} , x_{20} punti fissi di E_n , x_{20} accessibile da x_{10} partendo al tempo t_1 .

Allora esiste una strategia ottimale $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $t_2 < +\infty$, cioè tale che, se $x(t)$ è la corrispondente traiettoria in E_n ,

$$(24) \quad \begin{aligned} & x(t_1) = x_{10}, \quad x(t_2) = x_{20}, \quad t_1, x_{10}, x_{20} \text{ fissi, } t_1 \leq t_2 < +\infty, \\ & u(t) \text{ misurabile, } x(t) \text{ assolutamente continuo in } [t_1, t_2], \\ & dx_i/dt = f_i[t, x(t), u(t)], i = 1, \dots, n, u(t) \in U[t, x(t)], t_1 \leq t \leq t_2, \\ & I[u] = \int_{t_1}^{t_2} f_0[t, x(t), u(t)] dt = \text{minimo.} \end{aligned}$$

Un analogo enunciato vale nel caso in cui anche t_2 è fisso.

Nel lavoro di L. Markus ed E. B. Lee [38] si assume che l'insieme U è fisso e compatto, l'insieme $\tilde{V}(t, x) = \tilde{f}(t, x, U)$ è convesso, ma il bersaglio x_{20} è sostituito da un insieme chiuso $B(t)$ qualsiasi, e $B(t)$ può variare col tempo. In tal caso, $B(t)$ è supposto chiuso per ogni t , e funzione continua di t per t variabile in un intervallo $[t_1, T]$, $T < +\infty$. Con $B(t)$ funzione continua di t in $[t_1, T]$ si intende che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $t, t' \in [t_1, T]$ con $|t - t'| < \delta$, risulta $B(t') \subset [B(t)]_\varepsilon$, $B(t) \subset [B(t')]_\varepsilon$. Questa variante si può includere in un enunciato di poco più generale del teorema di Filippov, assumendo che t_1, x_{10} siano ancora fissi, che $B(t)$ sia un insieme compatto dipendente da t e continuo rispetto a t , e che $B(t)$ sia accessibile da x_{10} partendo da x_{10} al tempo t_1 . Allora esiste una strategia ottimale $u(t)$, cioè tale che, se $x(t)$ è la corrispondente traiettoria, risulta

$$x(t_1) = x_{10}, \quad x(t_2) \in B(t_2), \quad t_1, x_{10} \text{ fissi, } t_1 \leq t_2 < +\infty,$$

le rimanenti relazioni essendo come in (24).

Nel lavoro di E. Roxin [47] si assume di nuovo che l'insieme U è fisso e compatto, l'insieme $\tilde{V}(t, x) = \tilde{f}(t, x, U)$ è convesso, e il bersaglio è un punto fisso, ma si assume che le funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, sono continue in (x, u) , misurabili in t , e ammettono una maggiorante che è integrabile secondo Lebesgue. Anche questa variante si può includere nell'unico enunciato di poco più generale del teorema di Filippov

indicato sopra, assumendo che le funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, siano continue in (t, x) , misurabili in t , e che esista una funzione $\eta(t)$, $t_1 \leq t$, L-integrabile in ogni intervallo finito, tale che $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n \leq \|x\| \eta(t)$, per ogni $(t, x, u) \in E_0 \times E_n \times U(t, x)$.

La condizione $(\beta) f_0(t, x, u) \geq m > 0$ ha il solo scopo di garantire che il costo diventa maggiore di qualsiasi numero assegnato al crescere di t_2 così che per la determinazione del minimo costo ci si può limitare alla considerazione delle sole strategie $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con $t_2 \leq T$ per qualche T abbastanza grande. Pertanto la condizione (β) può essere soppressa, se ci si limita alla considerazione delle strategie con $t_1 \leq t_2 \leq T$, e si cerca il minimo costo rispetto alle strategie che soddisfano tale condizione. La condizione (β) è certamente soddisfatta nel problema del minimo tempo ove si ha $f_0 = 1$.

La condizione (α) del teorema di Filippov e relative varianti ha il solo scopo di garantire che le traiettorie uscenti dal punto iniziale x_{10} al tempo t_1 rimangono in parti compatte dello spazio E_n per t variabile in intervalli finiti e perciò le equazioni differenziali (II) non hanno tempi di fuga finiti. La condizione (α) pertanto può essere eliminata, se ci si limita alla considerazione di strategie con $t_1 \leq t \leq T$, e si sa che le corrispondenti traiettorie rimangono in una parte compatta di E_n . La condizione (α) è certamente soddisfatta se $|f_i(t, x, u)| \leq A + B \|x\|$ per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$, $u \in U(t, x)$, e opportune costanti A, B . In armonia con E. Roxin, tale condizione può essere sostituita con $|f_i(t, x, u)| \leq (A + B \|x\|) \eta(t)$, $i = 1, \dots, n$, ove $\eta(t)$, $t \geq t_1$, è una data funzione, non negativa e misurabile, che è integrabile secondo Lebesgue in ogni intervallo finito.

Nelle dimostrazioni di A. F. Filippov, L. Markus ed E. B. Lee, e di E. Roxin si fa uso del concetto di convergenza debole e della proprietà di compattezza debole della sfera unità in uno spazio di Hilbert o di Banach. Tuttavia, è facile vedere che, introducendo le variabili ausiliarie $y_j(t) = \int_0^t u_j(\tau) d\tau$, le stesse dimostrazioni possono ripetersi facendo uso soltanto

della topologia uniforme sulle $x_i(t)$ e sulle $y_j(t)$ e del teorema di Ascoli. Le condizioni del teorema e relative varianti assicurano allora che per ogni successione minimizzante le corrispondenti funzioni $x_i(t)$ e $y_j(t)$ sono equicontinue e equilimitate, e quindi si può estrarre dalla successione minimizzante una sottosuccessione che è convergente nella topologia uniforme.

È dovuta ad E. Roxin l'osservazione che gli stessi ragionamenti effettivamente dimostrano che l'insieme W di tutti i punti $(x_0, x_1, \dots, x_n, t_2)$, $t_1 \leq t_2 \leq T$, che sono « accessibili » da $(0, x_{11}, \dots, x_{n1}, t_1)$ nel corrispondente spazio-tempo E_{n+2} è compatto. Naturalmente, se $x_{20} = (x_{12}, \dots, x_{n2})$ è un punto accessibile dello spazio E_n delle $(x_1, \dots, x_n)$ partendo da $x_{10} = (x_{11}, \dots, x_{n1})$ al tempo t_1 ed in un tempo $t_2 \leq T$, allora x_{20} è contenuto nella proiezione W_0 di W su E_n . D'altra parte, l'insieme di tutti i punti di W in E_{n+2} con $x_1 = x_{12}, \dots, x_n = x_{n2}$ è l'intersezione dell'insieme compatto W con un sottoinsieme lineare di E_{n+2} , e pertanto è ancora compatto, e quindi contiene un elemento con $x_0 = I[u] = \text{minimo}$. L'esistenza del minimo di $I[u]$ è quindi una conseguenza della compattezza dell'insieme W .

La condizione $(\tilde{\gamma})$ del teorema di Filippov e relative varianti è adoperata per dimostrare che gli elementi di accumulazione della successione minimizzante soddisfano ancora le equazioni differenziali (II) del problema. Esempi di L. Markus ed E. B. Lee, e di E. Roxin, mostrano che questa conclusione — e l'esistenza del minimo — possono venire a mancare quando la ipotesi $(\tilde{\gamma})$ non è soddisfatta. Gli stessi esempi, e altri, provano che il minimo può mancare persino se si sostituisce $(\tilde{\gamma})$ con la condizione (γ_0) che $f_0(t, x, u)$ sia convessa, o addirittura che tutte le $n + 1$ funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, siano convesse in u per $u \in U(t, x)$, e per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ [26].

Denoteremo come sempre con f ed $\tilde{f}$ i vettori $f = (f_1, \dots, f_n)$, $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$. È opportuno confrontare la condizione $(\tilde{\gamma})$ con una condizione alquanto più debole che denoteremo con (γ) : l'insieme $V(t, x) = f[t, x, U(t, x)]$ è un sottoinsieme convesso di E_n per ogni (t, x) . Ovviamente $(\tilde{\gamma})$ implica (γ) es-

sendo V la proiezione su E_n dell'insieme $\tilde{V}$ di E_{n+1} . Per vedere che (γ) è alquanto più debole di $(\tilde{\gamma})$ si noti che, ad esempio per $n = 1$ ed U connesso, l'insieme V è un segmento di E_1 e pertanto (γ) è sempre soddisfatta, mentre V è un sottoinsieme proprio di E_2 e $(\tilde{\gamma})$ può non essere soddisfatta. Ad esempio, se U è esso stesso un segmento ed f_0, f_1 sono di classe C^1 almeno in u , allora $(\tilde{\gamma})$ è soddisfatta se e soltanto se V è ancora un segmento, ossia se e soltanto se $Af_0 + Bf_1 + C = 0$ per ogni $u \in U$, ove A, B, C sono indipendenti da u (U , e così A, B, C , possono dipendere da t, x). Esempi mostrano che la condizione $(\tilde{\gamma})$ del teorema di Filippov non può essere sostituita dalla condizione più debole (γ) , e neppure dalla condizione $(\gamma) + (\gamma_0)$ [26]. Tuttavia la condizione $(\tilde{\gamma})$ può essere sostituita dalla condizione $(\gamma) + (\gamma_0)$ se in aggiunta si assume che la convessità di f_0 sia ovunque « più forte » della convessità di f nel senso che verrà espresso dal teorema di esistenza II che enunciamo più sotto. Allo scopo, dobbiamo introdurre convenienti notazioni ed ipotesi, secondo la ben nota tecnica dei piani d'appoggio di un corpo convesso.

Denoteremo come sempre con E_0 l'insieme di tutti i numeri reali con $t \geq t_1$, con $U(t, x), (t, x) \in E_0 \times E_n$, un sottoinsieme variabile di E_m , e per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_m$ denoteremo con $U^*(t, x)$ l'involucro convesso di $U(t, x)$. Denoteremo con $M \subset E_{n+m+1}$ l'insieme di tutti i (t, x, u) con $t \in E_0, x \in E_n, u \in U(t, x)$, e con $M^* \subset E_{n+m+1}$ l'analogo insieme con $u \in U^*(t, x)$. Supporremo ora che le funzioni $f_i(t, x, u), i = 0, 1, \dots, n$, sono definite nell'insieme M^* più ampio di M e ivi continue. In altre parole, ammettiamo che le funzioni f_i abbiano un'estensione continua su M^* . Tuttavia, seguiranno ad esigere che le strategie ammissibili $u(t)$ abbiano i loro valori in $U(t, x)$ per ogni (t, x) e perciò, se $x(t)$ è la relativa traiettoria, si abbia $[t, x(t), u(t)] \in M$ per ogni t . Denoteremo al solito con f ed $\tilde{f}$ i vettori $f(t, x, u) = (f_1, \dots, f_n), \tilde{f}(t, x, u) = (f_0, f_1, \dots, f_n), (t, x, u) \in M^*$. Nel teorema II avremo bisogno delle seguenti ipotesi.

Ipotesi (C) : (C₁) Le funzioni $f_i(t, x, u), i = 0, 1, \dots, n$, sono continue in M^* ; (C₂) Per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ l'insieme $U(t, x)$

è un sottoinsieme compatto di E_m , e $U(t, x)$ è una funzione semicontinua di (t, x) in $E_0 \times E_n$; (C_3) Per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ l'insieme $V(t, x) = f[t, x, U(t, x)]$ è un sottoinsieme convesso (e necessariamente compatto) di E_n ; (C_4) Valgono le ipotesi (α) e (β) del Teorema I.

Ipotesi (A): Esiste una funzione non negativa e misurabile $C = C(t, x, u)$, $(t, x, u) \in M^*$, avente la seguente proprietà: Per ogni $(t_0, x_0, u_0) \in M^*$ ed $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$, $\delta = \delta(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$, e una funzione lineare $z = z(u) = r + b'u$, $u \in E_m$ (r scalare, $b \in E_m$, $r = r(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$, $b = b(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$) tali che, per ogni $(t, x, u) \in M^*$ con $|t - t_0| < \delta$, $\|x - x_0\| < \delta$ risulti $f_0(t, x, u) \geq z(u) + C \|u - u_0\|^2$, $C = C(t_0, x_0, u_0)$, e per ogni $(t, x, u) \in M^*$ con $|t - t_0| < \delta$, $\|x - x_0\| < \delta$; $\|u - u_0\| < \delta$ risulti anche $f_0(t, x, u) \leq z(u) + \varepsilon$.

Ipotesi (B): Esiste una funzione non negativa, misurabile e localmente limitata $D(t, x, u)$, $(t, x, u) \in M^*$, avente la seguente proprietà: per ogni $(t_0, x_0, u_0) \in M^*$ ed $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$, $\delta = \delta(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$ e un vettore funzione lineare $Z(u) = R + Bu$, $u \in E_m$, $Z \in E_n$, con R, B matrici dei tipi $(n, 1)$, (n, m) rispettivamente, $R = R(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$, $B = B(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$, tali che per ogni $(t, x, u) \in M^*$ con $|t - t_0| < \delta$, $\|x - x_0\| < \delta$, $u \in U^*(t, x)$, risulti $\|f(t, x, u) - Z(u)\| \leq D \|u - u_0\|^2 + \varepsilon$, $D = D(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$.

Ipotesi (L): Esistono due funzioni $L(t, x, u)$, $\Lambda(t, x, u)$, $(t, x, u) \in M^*$, entrambe non negative e misurabili, con eventuali punti di infinito le cui coordinate t coprono al più un insieme di misura zero in E_0 , aventi le seguenti proprietà: (L_1) $|f_0(t, x, u) - f_0(t, x, u_0)| \leq L(t, x, u_0) \|u - u_0\|$ per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ e per ogni due $u, u_0 \in U^*(t, x)$; (L_2) per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$, per ogni tre vettori z_0, z, u_0 con

$$z_0, z \in V^*(t, x) = f[t, x, U^*(t, x)], \quad u_0 = U^*(t, x), \quad z_0 = f(t, x, u_0),$$

allora per ogni vettore $u \in U^*(t, x)$ con $z = f(t, x, u)$, $\|u - u_0\| = \text{minimo}$, risulta $\|u - u_0\| \leq \Lambda(t, x, u_0) \|z - z_0\|$.

La condizione (A) è certamente verificata se per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ la funzione $f_0(t, x, u)$ della sola u coincide con

una funzione di classe C^2 in $u = (u_1, \dots, u_m)$ e se la forma quadratica nelle variabili reali $\xi_1, \dots, \xi_n$ verifica la relazione

$$\sum_{h,k} f_{ohk}(t, x, u) \xi_h \xi_k \geq C(t, x, u) (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)$$

per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$ e ove $f_{ohk} = \partial^2 f_0 / \partial u_h \partial u_k$.

La condizione (B) è certamente verificata se, per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$, le funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 1, \dots, n$, coincidono in U^* con funzioni di classe C^2 in $u = (u_1, \dots, u_m)$, e se risulta

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum f_{ihk}(t, x, u) \xi_h \xi_k \right| \leq D(t, x, u) (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)$$

per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$.

La condizione (L), ovviamente, non richiede la condizione di monotoneità di f nel vettore u , condizione che sarebbe impossibile da verificare ad esempio se $n < m$. Tuttavia, per $n \geq m$, la condizione (L) è certamente verificata se f è monotona in u e di più se

$$\|u - u_0\| \leq A(t, x, u_0) \|f(t, x, u) - f(t, x, u_0)\|$$

per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ e per ogni due vettori $u, u_0 \in U^*(t, x)$.

Teorema di esistenza II (Cesari [26]): Nelle condizioni (C), (A), (B), (L) con

$$A(t, x, u)L(t, x, u)D(t, x, u) \leq C(t, x, u), \quad (t, x, u) \in M^*,$$

dove il segno $=$ vale al più per punti $(t, x, u) \in M^*$ i cui valori t formano un insieme di misura nulla in E_0 , se il punto $x_{20} \in E_n$ è accessibile da x_{10} partendo al tempo t_1 , allora esiste una strategia ottimale $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, cioè soddisfacente le stesse relazioni (24) del teorema di Filippov.

La dimostrazione del Teorema II è basata sul concetto di semicontinuità dell'integrale I rispetto al vettore delle $x_i(t)$ e delle $y_j(t)$ nella topologia uniforme, e perciò nell'ordine di idee del metodo diretto del Tonelli. Così pure le condizioni (A) e (B) sono scritte secondo la tecnica dei piani di appoggio di un corpo convesso, spesso usata in connessione col metodo

di Tonelli. D'altra parte, condizioni dei tipi (γ) e $(\tilde{\gamma})$ non sono state usate precedentemente in connessione con questo metodo. Rimandiamo al lavoro [26] sia per la dimostrazione del teorema II, che ha richiesto un nuovo tipo di ragionamento, sia per esempi, e per una analisi delle condizioni (A) , (B) , (C) , (L) .

Per precedenti ricerche su problemi di Lagrange, Mayer e Bolza del calcolo delle variazioni nell'indirizzo di Tonelli dobbiamo qui rimandare ai lavori originali; e particolarmente ai lavori di B. Manià [42] L. Graves [29], Tonelli [50] ed E. Magenes [41]. Si noti che il Graves già nel 1936 ([29], p. 466) fa notare che i risultati del suo lavoro valgono anche se si richiede che le variabili soddisfino a certi tipi di disuguaglianze finite o differenziali, cioè, in presenza di vincoli unilaterali. Finalmente, si deve notare che il Tonelli stesso negli ultimi suoi lavori [51] scritti intorno al 1940 ha studiato vari tipi di problemi di calcolo delle variazioni che sono tutti problemi singolari e con vincoli unilaterali.

È chiaro da tutto quanto precede che i problemi di controllo ottimo debbono essere inquadrati nell'ambito delle teorie moderne del calcolo delle variazioni.

Il Gamkrelidze ha proposto recentemente una notevole estensione della classe K delle strategie ammissibili. L'estensione proposta dal Gamkrelidze corrisponde alle strategie che questo autore chiama «soluzioni scorrevoli». Tale estensione è parallela a quella delle soluzioni «generalizzate» nel senso di L. C. Young. Rimandiamo qui ai lavori di R. V. Gamkrelidze [28], A. Turowicz [52], e ai lavori di E. J. McShane [40] che studiò i problemi di Bolza, Lagrange e Mayer nell'ordine di idee di L. C. Young.

Rimandiamo ai lavori originali e in particolare alla monografia [45] per una varietà di ulteriori problemi che non possono trovar luogo nell'ambito della presente breve esposizione: problemi singolari, problemi in cui le coordinate spaziali $x_i(t)$ debbono soddisfare vincoli unilaterali (R. V. Gamkrelidze), problemi in presenza di variabili casuali (N. N. Krasovskii), problemi stocastici (E. F. Mishchenko). La stessa monografia

[45] contiene un'amplissima bibliografia. Ulteriori riferimenti sono dati nella raccolta di G. Leitmann [37]. Finalmente accenniamo qui che un punto di vista alquanto diverso è stato proposto da R. Bellman [25] in problemi di ottimizzazione del calcolo delle variazioni o di carattere stocastico.

BIBLIOGRAFIA

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE:

- [1] ANTOSIEWICZ H. A. (ed.), *Proceedings Symposium Linear Programming*, Washington, D.C., 1955, « Maton. Bureau Standards », 2 voll.
- [2] ARROW K. J., L. HURWITZ e H. UZAWA (ed.), *Studies in linear and nonlinear programming*, « Stanford Univ. Math. Studies in the Social Sciences », vol. 2, Stanford 1958, vii + 229.
- [3] BANBURY J. e J. MAIFFLAND (ed.), *Proceedings of the Sec. Intern. Conference on operational research*, « Aix en Provence 1960 », J. Wiley, New York, 1961, xx+810.
- [4] BAUMOL W. J., *Economic Theory and operations analysis*, Prentice Hall 1961, xx+810 pp.
- [5] BURGER E., *Einführung in die Theorie der Spiele*, mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie, « W. de Gruiter », Berlin 1959, 169 pp.
- [6] BUSSI C., *Considerazioni sulle applicazioni del metodo della programmazione lineare*. « Atti Accad. Scienze Torino », vol. 94, 1959-60, pp. 202-210.
- [7] DANTZIG G. B., *Programming of interdependent activities*, « Econometrica », vol. 17, 1949, pp. 200-211. Ristampato con varianti in [14], pp. 19-32.
- [8] DANTZIG G. B., *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, [14], pp. 339-347.
- [9] GALE D., *The theory of linear economic models*, « McGraw Hill », New York 1960, xxi+330 pp.
- [10] KANTOROVICH L. V., *Economic calculation of the best use of resources*, « Izdat Akad. Nauk Mosk. », 1959, 344 pp.
- [11] KANTOROVICH L. V., *Mathematical methods of organizing and planning production*. « Management Sci. », vol. 6, 1959-60, pp. 366-422.
- [12] KARLIN S., *Mathematical methods and theory of games, programming, and economics*, voll. I e II, Addison Wesley 1959, x+433, xi+386 pp.
- [13] LEONTIEF W. W., *Die Wirtschaft als Kreislauf*, « Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik », vol. 60, 1928.

- [14] KOOPMANS T. C. (ed.), *Activity Analysis of production and allocation* (Cowles Commission Monograph No. 13), «J. Wiley», New York 1951, xiv+404 pp.
- [15] KUHN H. W. e A. W. TUCKER (ed.), *Linear inequalities and related systems*. «Annals of Math. Studies No. 38», Princeton 1936, xxi+322 pp.
- [16] KUHN H. W. e A. W. TUCKER (ed.), *Contributions to the theory of games*, «Annals of Math. Studies No. 24, 28, 39, 40», Princeton 1950-59.
- [17] NEMCINOV V. S. (ed.), *Applications of mathematics in economic investigations*, «Isdat. Soc. Lit. Mosk.», 1959, 486 pp.
- [18] J. VON NEUMANN, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, «Math. Annalen», vol. 100, 1928, pp. 295-320.
- [19] J. VON NEUMANN, *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, «Ergebn. eines Math. Koll. Vienna» (ed. K. Menger), vol. 8, 1937, pp. 73-83. Trad. inglese in «Rev. Econ. Studies», vol. 13, 1945-46, pp. 1-9.
- [20] RICOSA S., *Programmazione lineare. Serie di Statistica: Teoria ed Applicazioni*. «Paolo Boringhieri», Torino 1961, ii+113 pp.
- [21] VAJDA S., *Mathematical programming*, «Addison Wesley 1961», ix+310 pp.
- [22] WEYL H., *Elementare Theorie der konvexen Polyeder*. «Commentar. Math. Helvetici», vol. 7, 1934-35, pp. 290-306. Trad. inglese in [16], pp. 3-18.

PROBLEMI DI CONTROLLO OTTIMO:

- [23] ANTOSIEWICZ H. A., *Linear control systems*, «Archive Rat. Mech. Anal.», vol. 12, 1963, pp. 313-324.
- [24] BREAKWELL J. V., *The optimization of trajectories*, «Journ. Soc. Industr. Appl. Math.», vol. 7, 1959, pp. 215-247.
- [25] BELLMAN R., *Dynamic programming*, «Princeton Univ. Press», 1957, xxv+342 pp.
- [26] CESARI L. (a) *Semicontinuità e convessità nel calcolo delle variazioni*;
(b) *Un teorema di esistenza in problemi di controllo ottimo*, «Annali Scuola Normale Sup. Pisa», In corso di stampa.
- [27] FILIPPOV A. F., *Su' alcuni problemi di controllo ottimo* (in russo). «Vest. Mosk. Univ.», vol. 2, 1959, pp. 25-32.
- [28] GAMKRELIDZE R. V., *Stati scorrevoli ottimi* (in russo). «Doklady Akad. Nauk SSSR», vol. 143, 1962, pp. 1243-1245.
- [29] GRAVES L. M., *The existence of an extremum in problems of Mayer*. «Trans. Amer. Math. Soc.», vol. 39, 1936, pp. 456-471.

- [30] HALKIN H., *Liapunov's theorem on the range of a vector measure and Pontryagin's maximum principle*. « Arch. Rat. Mech. Anal. », vol. 10, 1962, 296-304.
- [31] KRASOVSKII N. N., *On a problem of optimum control of nonlinear systems* (in russo), « Prikl. Mat. i Mekh. », vol. 23, 1959, pp. 209-229. Trad. inglese in « J. Appl. Math. Mech. », vol. 23, 1959, pp. 303-332.
- [32] KRASOVSKII N. N., *Sufficient conditions for optimization* (in russo). « Prikl. Mat. i Mekh. », vol. 23, 1959, pp. 592-594. Trad. inglese in « J. Appl. Math. Mech. », vol. 23, 1959, pp. 839-843.
- [33] KRASOVSKII N. N., *On the theory of optimum control* (in russo), « Prikl. Mat. i Mekh. », vol. 23, 1959, pp. 625-639. Trad. inglese in « J. Appl. Math. Mech. » vol. 23, 1959, pp. 899-919.
- [34] KRASOVSKII N. N., *On optimal control in the presence of random disturbances* (in russo), « Prikl. Mat. i Mekh. », vol. 24, 1960, pp. 64-79. Trad. inglese in « J. Appl. Math. Mech. », vol. 24, 1960, pp. 82-102.
- [35] KRASOVSKII N. N. ed E. A. LIDSKII, *Analytical design of controllers in stochastic systems with velocity limited controlled action* (in russo), « Prikl. Mat. i Mekh. », vol. 25, 1961, pp. 420-432. Trad. inglese in « J. Appl. Math. Mech. », vol. 25, 1961, pp. 627-643.
- [36] LA SALLE J. P., *The time optimal control problem. Contributions Theory Nonlinear Oscillations*, « Princeton », vol. 5, 1959, pp. 1-24.
- [37] LEITMANN G. (ed.), *Optimization Techniques*, « Academic Press », New York, 1962.
- [38] MARKUS L. ed E. B. LEE, *Optimal control for nonlinear processes*, « Arch. Rat. Mech. Anal. », vol. 8, 1961, pp. 36-58.
- [39] MCSHANE E. J., *On multipliers for Lagrange problems*, « Amer. J. Math. », vol. 61, 1939, pp. 809-819.
- [40] MCSHANE E. J., *Generalized curves, I, II, III*, « Duke Math. Journ. », vol. 6, 1940, pp. 523-536; vol. 7, 1940, pp. 1-27; vol. 7, 1940, pp. 28-61.
- [41] MAGENES E., *Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*, « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. 2, vol. 15, 1948, pp. 113-125.
- [42] MANIÀ B., *Sui problemi di Lagrange e di Mayer*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », vol. 58, 1934, pp. 285-310.
- [43] PONTRYAGIN L. S., *Optimal control processes* (in russo), « Uspehi Matem. Nauk », vol. 14, 1959, pp. 3-20. Trad. inglese in « Automation Express, Intern. Physical Index » (1909 Park Ave., New York), vol. 1, no. 10, 1959, pp. 15-17, vol. 2., no. 1, 1959, pp. 26-30.
- [44] PONTRYAGIN L. S., V. G. BOLTYANSKII e R. V. GAMKRELIDZE, *The theory of optimal processes. The maximum principle* (in russo).

- « Izvet. Akad. Nauk, SSSR », ser. mat., vol. 24, 1960, pp. 3-42. Trad. inglese in « Amer. Math. Soc. Translation », ser 2, vol. 18, 1961, pp. 341-382.
- [45] PONTRYAGIN L. S., V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE e E. F. MISHCHENKO, *The mathematical theory of optimal processes* (in russo), « Gos. Izdat. Mosk. 1961 ». Trad. inglese: « Interscience Publ. », New York 1962, viii+360.
- [46] ROZONER L. I., L. S. PONTRYAGIN's *maximum principle in the theory of optimal systems, I, II, III*. « Avtomatika i Telemekh. », vol. 20, 1959, pp. 1320-1334, 1441-1458, 1561-1578. Trad. inglese in « Automation and Remote Control », vol. 20, 1959, pp. 1288-1302, 1405-1421, 1517-1532.
- [47] ROXIN E., *The existence of optimal controls*, « Michigan Journ. Math. », vol. 9, 1962, pp. 109-119.
- [48] TONELLI L., *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, voll. I e II, Zanichelli, Bologna 1921-23.
- [49] TONELLI L., *Sulle proprietà delle estremanti*, « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. 2, vol. 3, 1934, pp. 213-237. Opere scelte, Cremonese Roma 1962, vol. III, pp. 160-191.
- [50] TONELLI L., *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange; Sulla semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange; Un teorema di semicontinuità per i problemi di Mayer*, « Opere scelte », vol. 3, pp. 320-327, 342-348, 380-386.
- [51] TONELLI L., *Su un nuovo tipo di problemi di calcolo delle variazioni; Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di calcolo delle variazioni*, « Opere Scelte », vol. 3., pp. 437-463, 464-468, 469-505.
- [52] TUROWICZ A., *Remarques sur un travail de R. V. Gamkrelidze relatif aux regimes optimaux glissants*. « Bulletin Acad. Polon. Sciences », vol. 10-11, 1962, pp. 557-558.
-

Constructions élémentaires et méthodes abstraites dans le calcul des variations généralisé.

Résumé. — *Il s'agit de constructions et de méthodes qui concernent une interprétation générale des notions de courbes et de variétés, son rôle dans le calcul des variations, et ses rapports avec la mécanique des fluides.*

I. — INTRODUCTION.

Ce n'est pas sans émotion que je remercie l'illustre académie de Turin de l'invitation dont elle m'a honoré. C'est à Turin que mes parents W. H. et G. C. Young ont commencé leur œuvre mathématique. Les noms des mathématiciens italiens de la génération qui nous précède, noms mentionnés si souvent déjà dans cette réunion, sont parmi ceux de leurs amis personnels. J'ai moi-même connu plusieurs d'entre eux.

Le nom de Lagrange, que nous honorons ici, est celui d'un homme dont l'œuvre ne s'arrête pas avec les quatorze volumes qu'il nous a laissés: le temps a encore grandi le nom de Lagrange, comme un arbre grandit après la mort de celui qui le plante.

C'est à Lagrange qu'on doit avant tout le caractère universel de la mathématique contemporaine, c'est lui qui a introduit les méthodes vraiment générales.

Le calcul des variations possède, grâce à Lagrange, ce caractère universel: il empiète sur la mécanique, sur l'hydrodynamique, sur l'analyse, la géométrie, la topologie, et sur le calcul fonctionnel. Entre ces disciplines, il n'existe plus de

ligne de démarcation claire. Une méthode, une idée, une définition même, qui fait son apparence dans l'une d'elles, peut devenir d'une importance capitale dans les autres.

Mais il faut distinguer entre la généralité véritable, et une certaine généralité factice, parfois de mode chez ceux qui voudraient faire croître des arbres sans racines. Les généralisations véritables ne sont pas un simple jeu d'esprit, ni des châteaux en Espagne. Celles qui nous occuperont, ont leurs racines, justement, dans des constructions élémentaires et intuitives.

2. — LES MÉTHODES GÉNÉRALES.

Il faut, dans le calcul des variations, des méthodes générales. Même les beaux travaux sur la méthode de semi-continuité de Tonelli se limitent à ce qu'on peut comparer au cas elliptique d'une équation aux dérivées partielles, et l'on n'a pas le droit d'ignorer le cas complémentaire, hyperbolique. Pour la même raison, il faut pouvoir dominer non seulement les problèmes de courbes, dans un espace de dimension arbitraire, mais aussi ceux des surfaces et des variétés supérieures.

Il le faut pour des raisons très pratiques: notre vie dépend chaque jour d'un nombre assez grand de coordonnées, p. ex. il y en a déjà une centaine, peut-être, chaque fois que nous mettons le pied dans un avion. Pour y voir clair, il faut une mathématique, telle que la concevait Lagrange, et non pas une science, telle que la botanique, où l'on énumère des cas particuliers.

3. — LES CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES.

La méthode générale de Lagrange, dans le calcul des variations, se basait sur une construction simple: on la nomme aujourd'hui *déformation*. Lagrange l'avait utilisée ailleurs, p. ex. dans la formule de Taylor à plusieurs variables. De nos jours, cette construction, qui est celle de l'*homotopie*, a pris une importance encore plus grande, à cause du développement

de la topologie, et elle a pénétré à nouveau de ce côté dans le calcul des variations avec la belle théorie de Morse [6].

Je voudrais rappeler aussi une méthode déjà plus ancienne que celle de Lagrange. Elle est due en partie à Huygens, et c'est elle qu'avait utilisé Jacques Bernouilli pour résoudre d'une manière élémentaire le problème de la brachistochrone. C'est celle qu'on trouve dans le livre de Carathéodory [2], qui l'avait ressuscitée, pour en faire la base d'une théorie qui complète celle de Lagrange. Elle conduit à des conditions *suffisantes*, tandis que celle de Lagrange conduit à des conditions seulement *nécessaires*.

Entre ces deux genres de conditions, il y a eu, pendant un certain temps, une lacune qu'il fallait absolument combler: car il est encore inadmissible, en mathématique, qu'on doive se contenter, pour toujours, de conditions nécessaires mais insuffisantes, ou vice-versa, donc, de nouveau, d'une énumération de cas particuliers.

4. — UN ALGORITHM VARIATIONNEL.

La méthode de Bernouilli-Huygens se laisse exprimer par un algorithm général [20], nécessaire et suffisant, qui n'est autre que le principe de Minkowski, ou, comme on l'appelle souvent aujourd'hui, celui de Hahn-Banach, sur l'existence, pour un corps convexe, d'une droite, ou d'un plan, d'appui [1].

Rappelons que cette méthode, sous la forme que lui donne Carathéodory [2], ou encore sous celle du chapitre sur le calcul des variations de Hardy-Littlewood-Polya [4], consiste à remplacer la fonction intégrante f , sous le signe d'intégrale d'un problème variationnel, par une fonction nouvelle $f + \varphi$ non-négative, où φ est un intégrant exact, c. à d. où l'intégrale de φ ne dépend que de la frontière ou des conditions aux limites. Une courbe, ou une variété, sur laquelle $f + \varphi = 0$, donne alors toujours un minimum évident.

Pour faire de cette méthode, un algorithm applicable à tous les problèmes du calcul des variations, de dimensions quelconques, dans lesquels on admet des variétés arbitraires

de frontière donnée, il suffit d'y faire un tout petit changement: il suffit d'y admettre des fonctions intégrantes φ exactes, *discontinues*. Ce changement est d'ailleurs nécessaire, déjà dans des problèmes classiques, tel que celui des surfaces minima de révolution.

5. — LE RÔLE DES DÉFINITIONS.

Ainsi, pour atteindre cette généralité que recherchait Lagrange, il faut un appareil fonctionnel qui ne soit pas limité par les restrictions, si naturelles, de continuité ou d'analyticité. Il faut l'appareil de l'analyse moderne. Donc il faut élargir les définitions anciennes.

Les définitions mathématiques sont, après tout, des créations de l'esprit humain: c'est à nous à les modifier, si leur simplicité apparente, qui avait dicté leur choix, devient malcommode. La philosophie géocentrique a bien eu, elle aussi, avant Gallilée, cette décevante simplicité.

Une des directions principales des recherches modernes sur le calcul des variations, celle représentée par les travaux de Tonelli [8] en utilisant la semi-continuité, se base précisément sur un élargissement des définitions classiques.

On peut faire un pas de plus dans cette même direction, en élargissant non seulement les notions de l'analyse, mais aussi celles de la géométrie. On arrive de cette façon à une théorie très générale, applicable aux problèmes variationnels de toutes les dimensions, non seulement dans le cas régulier, c. à d. elliptique, mais aussi dans le cas général. C'est la théorie de ce que j'ai appelé variétés généralisées.

6. — L'ORIGINE DES COURBES GÉNÉRALISÉES.

Je voudrais vous montrer d'abord, que la notion géométrique, toute faite à l'avance, de courbe, ou de segment rectiligne, ne suffit pas pour les besoins très pratiques du calcul des variations.

Comme point de départ, je prendrai une petite plaisanterie d'étudiants, d'après laquelle, dans un triangle ABC , le côté AB serait toujours égal à la somme des deux autres. Il s'agit d'une construction, citée en marge du calcul des variations par Lebesgue [5], pour préparer le lecteur à la belle méthode de Tonelli.

On désigne par L , M , N les milieux des segments AC , AB , BC , et l'on remplace d'abord la ligne brisée ACB par $ALMNB$, qui a même longueur. Ensuite on procède de même pour chacun des triangles ALM et MNB . En continuant la construction, on obtient successivement des lignes brisées P_1 , P_2 , ..., chacune desquelles aura la même longueur que ACB , et ces lignes brisées se rapprochent de plus en plus du côté AB . Comme la limite des P_v ($v = 1, 2, \dots$) sera située sur le côté AB , on se permet d'affirmer que $AB = AC + CB$.

Cette conclusion est fausse, mais elle a certainement du juste.

Si vous prenez un chemin de montagne en zig-zag, et si, au lieu de suivre la partie d'un tel chemin, représentée par la ligne brisée ACB , vous essayez le raccourci AB , vous n'arriverez, le plus souvent, qu'en même temps que ceux de vos camarades qui sont restés sur le chemin ACB .

Cela tient au fait suivant: à la montagne, on ne monte pas d'une façon trop raide. Sur le raccourci, pour éviter de glisser, il faut placer les pieds à un certain angle. On le voit bien, p. ex. lorsque des skieurs remontent une pente où il n'y a pas de funiculaire. Le raccourci devient ainsi, non pas une ligne droite véritable, mais une espèce de ligne brisée à côtés infiniment petits, et ces côtés là restent parallèles aux directions les plus favorables pour la montée, qui sont encore celles de AC et de CB .

De telles lignes brisées, à côtés infiniment petits, sont les solutions naturelles des problèmes irréguliers, ou hyperboliques, du calcul des variations. Ce sont des courbes généralisées.

7. — SURFACES FRACTIONNAIRES.

Les lignes brisées nous mettent à l'esprit un autre phénomène paradoxal: la construction bien connue, due à Péano, d'une courbe continue qui remplit un carré. Elle provient, en somme, du fait qu'une ligne brisée peut se rapprocher de tous les points du carré, tout comme le chemin qu'on fait parcourir aux touristes qui visitent une ville. En modifiant un peu l'idée de Péano, on peut construire, sur une surface courbe, élémentaire, donnée, S , un polygone curviligne fermé C , pour lequel l'aire minima d'une surface de bord C comprendra sûrement des bandes minces, qui recouvrent à peu près la moitié de S .

Si l'on choisit pour S un cylindre droit, à hauteur finie et à base circulaire, on peut prendre pour C un zig-zag fermé, homotope à cette base, qui découpe sur S une espèce de couronne. Dans ce cas une surface de bord C rencontre toute droite intérieure au cylindre, et l'on peut démontrer que son aire dépasse

$$\frac{1}{2} |S| + a - \varepsilon,$$

où $|S|$ désigne l'aire de S , a celle de la base, et ε un nombre positif arbitrairement petit, qui dépendra du choix de C sur S . (On voit sans peine que le carré de l'aire en question dépasse $\frac{1}{4} |S|^2 + a^2 - \varepsilon$, en considérant les projections, verticale et horizontale, de la surface; mais l'inégalité affirmée plus haut est vraie aussi).

Une construction analogue reste valable, si S est un tube recourbé, suffisamment mince, auquel on pourra donner, p. ex. dans l'espace à quatre dimensions, la forme d'une bouteille de Klein. Dans ce dernier cas, en orientant S d'une manière discontinue le long de C , sa frontière devient le double de C , d'où l'on conclut que, pour les surfaces de bord $2C$, l'aire minima ne dépasse pas $|S|$. Il existe donc, dans l'espace à quatre dimensions, une courbe fermée orientée C , telle que l'aire minima de

bord $2C$ est inférieure au double de celle de bord C . (Pour les détails, voir [19]).

Cette remarque est importante pour l'algorithm dont nous avons parlé au paragraphe 4. En effet si Σ est une surface de bord C d'aire minima, pour laquelle il existe une fonction intégrante φ exacte, telle que $f + \varphi$ soit non-négative et que $f + \varphi$ s'annule sur Σ , où f désigne la fonction $f(x, j) = |j|$, alors on voit tout de suite, non seulement que Σ , mais aussi que tout multiple entier positif $\nu\Sigma$, est d'aire minima. Notre construction montre que ce n'est pas le cas, déjà pour $\nu = 2$. Donc notre algorithm ne serait pas valable, ce qui est contraire à ce que nous avons affirmé plus haut.

Pour maintenir notre algorithm, il faut modifier la notion classique de surface de façon à rendre possible l'opération de la division par un entier positif. Une telle modification existe dans la topologie combinatoire, où l'on a coutume de définir p. ex. des polyèdres à coefficients réels positifs, ou polyèdres avec poids, à côté des polyèdres ordinaires. Aulieu d'une surface au sens classique, nous aurons ce qu'on pourrait se représenter comme une couche superficielle, de densité fractionnaire, et nous la nommerons surface fractionnaire.

8. — LES TYPES TOPOLOGIQUES INFINIS.

Déjà dans l'espace à trois dimensions, et toujours pour le problème de l'aire minima, c. à d. pour le problème relatif aux surfaces, le plus simple, l'existence d'une solution exige une notion de surface plus générale que celle de l'analyse classique.

Rappelons d'abord un phénomène connu depuis longtemps, mais qui n'en est pas moins remarquable: c'est qu'une surface d'aire minima, dont le bord est une courbe fermée simple, peut fort bien posséder un type topologique autre que celui du disque. Dans le cas des surfaces non-orientées, ce type peut être celui d'une bande de Möbius. Dans le cas des surfaces orientées, qui seul nous occupera ici, le type peut être celui d'un disque muni d'une hanse. Il suffit de prendre pour bord

la courbe fermée simple qu'on obtient en soudant ensemble deux arcs circulaires égaux, situés dans deux plans orthogonaux, chaque arc étant de presque 360° . Pour s'en rendre compte, on n'a qu'à observer une bulle de savon, dont le bord est sur un fil de fer ayant cette forme, à condition de souffler un peu dessus s'il le faut. C'est une expérience qu'on fait couramment pour montrer aux jeunes le rôle pratique de la topologie.

En modifiant un peu le bord, on arrive à des surfaces d'aire minima de type plus élevé, et même de type arbitrairement grand. Si l'on poursuit plus loin de telles modifications, on arrive, comme l'a montré Fleming [12], à un bord rectifiable pour lequel la surface d'aire minima ne peut être de type fini: ce n'est donc plus une surface au sens classique, car il faut lui donner une infinité de hanches.

Pour résoudre le problème de l'aire minima il faudra admettre de telles surfaces.

9. — LA NOTION DE LIMITE.

Ce n'est pas seulement la notion de courbe, ou de surface, qu'il nous faudra élargir, pour résoudre certains problèmes du calcul des variations. Il nous faudra aussi modifier convenablement la notion de limite d'une suite de courbes, ou de surfaces. Ainsi, dans le triangle ABC de plus haut, les lignes brisées $P_1, P_2, \dots$ possèdent, au sens usuel de l'analyse classique, pour limite le côté AB , tandis que nous désirons leur donner pour limite une ligne brisée, à côtés infiniment petits, qui restent parallèles à AC et CB .

Dans le cas des surfaces, et des dimensions supérieures, il y a une raison de plus pour éviter la limite classique, c'est qu'il lui manque le théorème de compacité d'Arzela. Les auteurs qui se sont occupés d'étendre, aux dimensions supérieures, la méthode de Tonelli, ont eu besoin de constructions simplificatrices qui rétablissent une sorte de compacité partielle. Il faut utiliser pour cela une opération géométrique assez intuitive, qui consiste à couper, sur les surfaces données, les pics trop aigus. Ce n'est pas une opération aisée, puisque,

pour les surfaces paramétriques usuelles, la partie à couper se définit moyennant un sous-domaine très compliqué du domaine paramétrique. Ainsi, si ce sous-domaine est simplement connexe, sa frontière se compose, en général, non plus de points, mais de bouts premiers de Carathéodory [9, 10, 13, 3]. Dans le cas des dimensions supérieures, et dans le cas de connexion multiple, on ne possède même pas de bouts premiers satisfaisants.

Il est clair qu'une opération aussi simple doit pouvoir s'effectuer sans passer par de telles complications, et qu'il faudra bien trancher le noeud gordien. Mais pour ce qui est de la compacité, en modifiant les définitions de limite d'une façon naturelle, nous rétablirons le théorème d'Arzela.

10. — DÉFINITION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES.

Pour nous, les exemples considérés ont une signification toute autre que pour les mathématiciens de l'époque de Weierstrass et Kronecker. Ainsi, le problème d'aire minima de Fleming aurait été pour eux insoluble. Ce n'est pas le point de vue auquel se plaçait Lagrange, ce n'est pas non plus le point de vue d'aujourd'hui.

On ne dit plus qu'une solution n'existe pas: on dit qu'il faut l'interpréter dans un sens plus général.

Nous aurons besoin de définitions généralisées. Pour les trouver, demandons-nous ce qu'il y a de vraiment essentiel dans les définitions classiques, ce que nous utilisons dans les problèmes de l'analyse, ou du calcul des variations.

Nous utilisons la notion de courbe, surtout pour former une intégrale curviligne. Il faut savoir intégrer, le long de la courbe donnée, une fonction continue $f(x, j)$, dite fonction intégrante, qui dépend du point x et du vecteur j , et qui remplit la condition d'homogénéité en j

$$f(x, \sigma j) = \sigma f(x, j) \quad \text{pour } \sigma \geq 0.$$

Pour l'intégration le long de la courbe paramétrique dont le point mobile est $x(t)$, on prend pour x ce point mobile, et pour j sa dérivée, et l'on forme l'intégrale par rapport à t .

Mais l'essentiel n'est pas le calcul de l'intégrale curviligne: l'essentiel c'est qu'une telle intégrale curviligne devient *une fonctionnelle* $L(f)$, *linéaire en f et assujettie à la condition supplémentaire de prendre une valeur non-négative, lorsque $f \geq 0$* . Ce sont les valeurs d'une telle fonctionnelle pour les différentes fonctions intégrantes f qui constituent l'essence véritable de la notion de courbe dans l'analyse, ses coordonnées abstraites. Plus généralement, nous considérons des fonctions intégrantes k -dimensionnelles, qui ne diffèrent des fonctions intégrantes, définies plus haut, qu'en y interprétant l'argument j , non comme un vecteur ordinaire, mais comme un multivecteur simple k -dimensionnel. Une fonctionnelle $L(f)$, définie pour les fonctions intégrantes f k -dimensionnelles, et linéaire en f , sera dite *variété généralisée, de dimension k , si sa valeur est non-négative lorsque $f \geq 0$* .

Dans un problème du calcul des variations, on aura affaire à une seule fonction intégrante f . Pour cette raison, on utilise, comme notion de limite, la *limite faible*, c. à d. que les variétés généralisées L_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) convergent vers la variété généralisée L , lorsque $L_\nu(f) \rightarrow L(f)$ pour chaque fonction intégrante f de la dimension donnée k .

Pour la ligne brisée, à côtés infiniment petits, que nous avons introduite plus haut, on définit sans peine une intégrale curviligne généralisée $L(f)$ qui lui servira de définition abstraite: en effet, soit $x(t)$ le point mobile de AB , et supposons sa dérivée x' constante et parallèle à AB ; on détermine deux vecteurs u, v parallèles à AC et CB , tels que $u + v = x'$, et l'on écrit
$$L(f) = \int \{f[x(t), u] + f[x(t), v]\} dt.$$
 On remarque bien que $L(f)$ est alors la limite faible d'une intégrale curviligne ordinaire, prise le long de P_ν .

II. — OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES ET ALGÈBRIQUES.

La somme $L_1 + L_2$ de deux variétés généralisées est une opération particulièrement simple à saisir: elle se définit par l'expression $L_1(f) + L_2(f)$. Mais on voit aussi que la division

par un entier positif se définit tout aussi facilement: donc la notion de surface fractionnaire, qui est nécessaire d'après le paragraphe 7, se justifie ici.

Toutes sortes de questions géométriques nous viennent à l'esprit. Quand est-ce qu'un point, ou une courbe donnée, sera situé sur une variété généralisée donnée? Quelle sera la frontière d'une telle variété? Comment former son intersection avec un ensemble donné de l'espace?

Comme ces questions se basent sur les notions classiques, il faut les modifier un peu, et je répondrai donc à des questions modifiées, qui jouent un rôle équivalent. Nous aurons besoin de notions auxiliaires. On appelle micro-variété, une variété généralisée M concentrée en un point x_0 , c. à d. telle que l'on ait, pour toute fonction intégrante $f(x, j)$, $M(f) = M(f_0)$, où f_0 désigne la fonction $f(x_0, j)$. Nous dirons que M est normalisée, si l'on a $M(f) = 1$ pour la fonction particulière $f(x, j) = |j|$.

Remarquons qu'on peut considérer comme une généralisation d'une intégrale curviligne, ou d'une intégrale de surface, une expression de la forme

$$(11.1) \quad L(f) = \int M(f) d\mu,$$

où μ est une mesure dans l'espace des x , et où $M(f)$ désigne une micro-variété, normalisée, dépendant du point x et concentrée en ce point, qu'on supposera définie pour presque chaque x . On peut montrer, en se servant de la représentation de Riesz, que toute variété généralisée possède une représentation unique de la forme (11.1).

La notion de point situé sur L se définit alors à un ensemble de mesure μ nulle près, et l'intersection de L avec un ensemble Borélien donné E se définit en limitant à E , l'intégration au côté droit de (11.1).

La notion de variété généralisée, de dimension inférieure à L , située sur L , sera définie seulement relativement à un certain nombre de fonctions Lipschitziennes $z(x)$, dites fonctions de niveau. Bornons-nous au cas d'une seule fonction $z(x)$.

Nous définirons alors, pour presque chaque valeur réelle h , une variété sur L que nous nommerons variété de niveau, ou simplement contour, à la hauteur h . Comme nous l'avons signalé plus haut, une telle définition n'a été possible jusqu'ici sur une surface paramétrique, qu'en faisant appel à la théorie des bouts premiers. Notre définition sera beaucoup plus directe.

En décomposant la mesure μ de (II.1) en deux parties, l'une singulière, l'autre absolument continue, par rapport à $|dz|$, on obtient une décomposition analogue de $L(f)$, et la partie absolument continue, qui seule jouera un rôle, aura la forme

$$\int L_z(f) |dz|,$$

où L_z désigne une variété généralisée, située dans un des ensembles $z(x) = \text{const.}$, de hauteur constante. On passe de L à L_z par une dérivation, ce qui rappelle l'idée de Minkowski, de considérer les courbes comme des dérivées des surfaces, et les surfaces comme les dérivées des volumes. Mais ici, comme L_z aura même dimension que L , il faut une seconde opération, pour amoindrir la dimension. C'est là une opération purement *algébrique*, basée sur la co-multiplication des multivecteurs, sur laquelle je passerai. On la trouvera dans l'article [16].

Passons à la notion de frontière. Déjà pour les surfaces qui se réduisent à des domaines plans, la frontière classique n'est pas une courbe. Donc nous ne chercherons pas ici à définir une frontière comme une variété généralisée. Nous nous placerons à un point de vue différent, qui se base, en fin de compte, sur le théorème de Stokes. Parmi les fonctions intégrantes f d'une dimension donnée, nous distinguons une sous-classe, celle des fonctions intégrantes *exactes* φ , c. à d. celles qui ont la propriété suivante: pour tout polytope orienté L , dont la frontière élémentaire s'annule, on a $L(\varphi) = 0$. Cela étant, nous nommerons frontière d'une variété généralisée L quelconque, la restriction de la fonctionnelle $L(f)$ aux fonctions intégrantes exactes $f = \varphi$.

Signalons une seconde restriction importante, qui nous met en rapport avec la belle théorie des courants de *de Rham*. Nous nommerons fonctions intégrantes linéaires, c. à d. linéaires en j , celles de la forme $f(x, j) = jP(x)$, et nous remarquons qu'elles sont isomorphes aux formes différentielles extérieures. La restriction de $L(f)$ aux f linéaires sera dite substratum de L . On peut l'identifier avec un courant borné à support compact. Les beaux théorèmes récents de M. M. Federer et Fleming [11] sur de tels courants conduisent à des résultats fondamentaux pour notre théorie [17].

12. — RAPPORTS AVEC LA MÉCANIQUE DES FLUIDES.

Est-il besoin de se demander si les mêmes restrictions de continuité et d'analyticité, que nous avons trouvées malcommodes en mathématique pure, dans des problèmes pourtant très pratiques et de tous les jours, seraient tout à coup précisément et parfaitement conformes aux lois naturelles, quand il s'agit de la mécanique des fluides? Au contraire, on remarque chaque jour, en regardant l'eau qui passe sous un pont, des choses qui s'accordent mal avec l'hydrodynamique classique, et qui, jusqu'ici ne s'expliquent que d'une façon très partielle. Quand on fait des hypothèses, qui semblent naturelles, il n'est pas dit que la nature y ait consenti: elle est donc restée quelque peu turbulente. Il s'agit de savoir si la théorie que j'ai esquissée sera davantage de son goût. Il faut donc en faire l'essai, et, puisqu'il faut commencer par quelque chose, je me permettrai des hypothèses simplificatrices, dont je me rends très bien compte qu'elles ne correspondent toujours pas à la réalité. Nous nous limiterons au mouvement stationnaire d'un fluide, et nous ne tiendrons compte que des variables qui donnent la position et la vitesse des éléments du fluide.

Nous aurons peut-être exclu de cette façon des effets qui correspondraient à ceux que nous avons relevés dans le problème de l'aire minima, c. à d. à ceux qui nous ont conduits à admettre des surfaces à une infinité de hanches et des surfaces

fractionnaires. Ce sont précisément de tels effets étranges qu'on cherche dans la mécanique des fluides. Il aurait fallu, sans doute, se demander d'abord dans quelle sorte d'espace on a à opérer, et de quelle dimension sont les variétés à analyser. L'espace en question aurait certainement eu une structure bien plus compliquée que ceux qu'on étudie en géométrie, car c'est un produit Cartésien d'espaces déjà très disparates. Il y entretrait une foule de variables supplémentaires: les composantes des tenseurs de pression, de viscosité, celles du champ électromagnétique, la température, l'entropie, peut-être même certaines variables discrètes. Dans cette confusion de variables, les effets qualitatifs seraient difficiles à trouver.

Sous la forme simplifiée où nous nous plaçons, on notera tout de même certaines différences vis-à-vis du traitement classique. Un mouvement fluide stationnaire sera défini, dans la description Eulérienne, par la vitesse $v(x)$ du fluide au point x et par une mesure μ dans l'espace des x ; cette mesure détermine la quantité du fluide qui se trouve dans un ensemble Borélien quelconque de valeurs de x . On peut la remplacer par une densité fluide ϱ , mais celle-ci sera alors à prendre dans le sens d'une distribution de Schwartz [7]. La vitesse et la densité ne joueront un rôle que sous la forme du produit ϱv , et nous poserons $|v| = 1$ sans perte de généralité. Pour éviter de modifier les conventions que nous avons faites à propos des variétés généralisées, nous supposerons de plus que μ ait un support compact, mais ce n'est pas essentiel.

Quant à la vitesse v , elle pourra être discontinue, mais nous la supposerons mesurable B . Par contre nous ne la supposerons pas nécessairement univoque.

En effet, on peut très bien concevoir un mouvement fluide, résultant p. ex. de la superposition de ceux de deux gazes raréfiés, où il y aurait, en chaque point x , plus d'une valeur de la vitesse $v(x)$. Dans ce cas, il ne suffira pas de spécifier, au point x , les valeurs possibles de la vitesse, il faudra indiquer de plus, dans quelles proportions la masse fluide se dirige dans les différentes directions possibles. Il faudra donc donner, au

point x , une mesure unité qui se répartit sur l'ensemble des valeurs de v assujetties à la condition $|v| = 1$, ou sur un sous-ensemble convenable.

Ainsi, conçu, un mouvement fluide stationnaire, donné par une description Eulérienne, définit d'une manière univoque une variété généralisée de dimension unité, et vice-versa, d'après la formule (11.1). Il suffit pour cela d'identifier d'après la représentation de Riesz, l'expression $M(f)$ avec la moyenne de $f(x, j)$ pour les valeurs possibles $j = v$ de la vitesse au point x .

13. — LE RÔLE DE LA FRONTIÈRE.

Il est temps de réexaminer d'un œil critique, les idées que j'ai esquissées. Parmi les variétés généralisées, en particulier celles de dimension unité, nous avons admis celles qui sont concentrées en un seul point. Qu'on leur accorde le nom de variétés, passe encore, mais que ce soient des mouvements fluides, c'est un peu fort. On peut donc se demander si nos variétés généralisées sont peut-être beaucoup *trop* générales.

Cette critique a du juste, mais il faut en exclure d'abord les micro-variétés closes: ce sont des cas limites de variétés closes, et dans la mécanique des fluides c'est à peu près tout ce que nous possédons d'appareil mathématique qui se rapproche un peu de la turbulence dans notre théorie. Quant aux micro-variétés non-closes, elles se trouvent parmi les variétés généralisées qu'on élimine d'une façon automatique, dès qu'on impose des conditions, même très générales, sur leurs frontières.

Pratiquement, toutes les frontières admises jusqu'ici sont des cas particuliers de ce que j'ai appelé une *frontière A*. La possession d'une telle frontière impose sur la structure d'une variété généralisée des conditions très restrictives. Nous y reviendrons au paragraphe suivant. Notons ici que les variétés généralisées de frontière *A* sont les limites, dans un sens très fort, de variétés élémentaires, et que ce sont, en fin de compte, les théorèmes de ce genre, démontrés dans [17],

qui justifient dans nos problèmes, l'introduction des variétés généralisées.

Dans le cas d'un mouvement fluide stationnaire, c'est l'équation de continuité $\operatorname{div}(\rho v) = 0$ qui remplace les conditions sur la frontière. Cette équation est à interpréter d'après la théorie des distributions, dans un sens global, ou tout au moins local. Mais alors elle signifie que la frontière s'annule, ou tout au moins, que son support ne pénètre, pour la mesure μ , le voisinage de presque aucun point du fluide. Cela suffit pour qu'on ait affaire à une frontière A .

14. — DESCRIPTION LAGRANGIENNE.

Les remarques que nous avons faites au paragraphe précédent, nous amènent à une question fondamentale de la théorie des variétés généralisées, que nous n'avons pu résoudre que pour les variétés de dimension 0, 1, $n-1$, n de l'espace à n dimensions. Dans le cas d'un mouvement fluide stationnaire, cette question est déjà ancienne, c'est celle de l'équivalence de la description d'Euler avec celle de Lagrange.

Cette dernière s'obtient, dans les traités classiques, en intégrant le système d'équations différentielles $dx/dt = v(x)$, c. à d. en déterminant les courbes intégrales, ou lignes de courant. Si c'était bien là, tout ce qu'il y avait à faire, ce serait une question très secondaire. En réalité, les lignes de courant ne suffisent pas pour déterminer le mouvement fluide, car il nous faut encore savoir comment se répartit la masse fluide sur les différentes lignes de courant.

Avec nos hypothèses très générales sur $v(x)$, la notion de ligne de courant sera à modifier quelque peu. Je passerai sur la définition exacte, et je me contenterai de noter qu'il faudra distinguer deux lignes de courant par des étiquettes autres que les conditions initiales, car ces dernières ne les déterminent que si l'on fait des hypothèses spéciales. En outre, nous considérons toute partie, de longueur positive, d'une ligne de courant, comme étant elle-même une ligne de

courant. Je désignerai par L_a la ligne de courant dont l'étiquette est a .

Nous dirons, d'un mouvement fluide stationnaire défini par la variété généralisée L , donc par la fonctionnelle $L(f)$ correspondante, qu'il possède une description Lagrangienne, s'il existe, dans l'espace des étiquettes a , une mesure da , telle que l'on ait

$$(14.1) \quad L = \int L_a da,$$

c. à d. $L(f) = \int L_a(f) da$ pour chaque fonction intégrante f .

Notre question fondamentale est alors la suivante: quels mouvements fluides stationnaires possèdent une description Lagrangienne? J'ai pu y répondre récemment [18]: *pour qu'un mouvement fluide stationnaire possède une telle description, il faut et il suffit qu'il possède une frontière A* . En particulier, tout mouvement stationnaire assujéti à l'équation de continuité la possède. En outre, comme je l'ai indiqué plus haut, la question analogue a été résolue pour les variétés de dimensions 0, 1, $n - 1$, n dans l'espace à n dimensions, mais pas encore pour les dimensions intermédiaires.

L'analyse des questions de ce genre n'est encore qu'une première étape. Dans le calcul des variations, il faut ensuite étudier les extrémals généralisées, et j'ai montré récemment [16] qu'elles possèdent une propriété très curieuse dans le cas régulier. Dans la mécanique des fluides, on étudiera de même, avec nos hypothèses, les solutions faibles des équations du mouvement. Le point de vue sera différent de celui de la théorie des équations aux dérivées partielles, car les solutions ne seront ni des fonctions, ni des distributions de Schwarz, et ce seront ces solutions nouvelles qui expliqueront peut-être des phénomènes encore mystérieux.

OUVRAGES ET TRAVAUX CITÉS

- [1] BANACH S., *Théorie des opérations linéaires*, « Monografie matematyczne », Warszawa , 1931.
- [2] CARATHÉODORY C., *Variationsrechnung*, Leipzig und Berlin, 1935.
- [3] CESARI L., *Surface area*, « Annals of math. », studies n. 35, Princeton, 1956.
- [4] HARDY G. H., J. E. LITTLEWOOD G. POLYA, « Inequalities », Cambridge, 1934.
- [5] LEBESGUE H., *En marge du calcul des variations*, œuvre posthume qui sera publiée prochainement sous les bons soins de l'Enseignement mathématique, Genève.
- [6] MORSE M., *The calculus of variations in the large*, « Amer. Math. Soc. Coll. », vol. 18 (1934).
- [7] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions*, « Actualités Sc. et Ind. 1091 et 1122 », Paris, 1950.
- [8] TONELLI L., *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Bologna, 1921.
- [9] CARATHÉODORY C., *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, « Math. Ann. », 73 (1913) 323-370.
- [10] CARATHÉODORY C., *Untersuchungen über die konforme Abbildung von festen und veränderlichen Gebieten*, « ibidem », 72 (1912) 107-144.
- [11] FEDERER H., FLEMING W. H., *Normal and integral currents*, « Annals of Math. », 72 (1960) 458-520.
- [12] FLEMING W. H., *An example in the problem of least area*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 7 (1956) 1063-1074.
- [13] URSELL H. D., YOUNG L. C., *Remarks on prime ends*, « Mem. Amer. Math. Soc. », n. 3.
- [14] YOUNG L. C., *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations*, « Comptes Rendus Soc. des Sc. et Lettres de Varsovie », 30 (1937) cl 3, 212-234.
- [15] YOUNG L. C., *Surfaces paramétriques généralisées*, « Bul. Soc. Math. France », 79 (1951) 59-84.
- [16] YOUNG L. C., *Contours on generalized and extremal varieties*, « Journ. of Math. and Mech. », 11 (1962) 615-646.
- [17] YOUNG L. C., *Generalized varieties as limits*, ibidem à paraître.
- [18] YOUNG L. C., *Remarques concernant un problème de représentation des variétés généralisées, et son rapport au mouvement stationnaire d'un fluide*, à paraître « Enseignement Math. ».
- [19] YOUNG L. C., *On the relative area of a Klein bottle*, à paraître « Rend. Circ. Mat. di Palermo ».
- [20] YOUNG L. C., *A variational algorithm*, « Riv. di Mat. Univ. di Parma », 5 (1954) 255-268.

**Un teorema generale di semicontinuità
per gli integrali multipli e sue applicazioni alla
fisica-matematica (*).**

Riassunto. — *Vengono riferiti i risultati salienti di una ricerca, relativa all'equilibrio dei corpi elastici con vincoli unilaterali sul contorno.*

In una serie di conferenze tenute nel 1959 presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Antonio Signorini [1] ⁽¹⁾ considerò una nuova classe di problemi elastostatici, relativi a corpi a tre dimensioni soggetti sul contorno a vincoli unilaterali. Problemi siffatti portano ad una nuova classe di problemi di valori al contorno, non lineari, per le *equazioni indefinite dell'equilibrio*. Differentemente dai problemi classici con vincoli bilaterali, dove le condizioni al contorno sono espresse da ben determinate equazioni sul contorno, nel caso considerato da Signorini la novità del problema consiste nella circostanza che due insiemi di condizioni, espresse da equazioni od inequazioni, vengono date sulla parte di contorno ove i vincoli sono unilaterali; le funzioni incognite debbono soddisfare ad uno

(*) La presente conferenza è stata anche tenuta, in lingua inglese, al Simposio di Meccanica del continuo, tenutosi a Tbilisi (Georgia-URSS) nel settembre 1963.

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia alla fine del presente lavoro.

dei due insiemi di condizioni. Non è « a priori » noto se in un punto del contorno, dove i vincoli sono unilaterali, le funzioni incognite soddisfano al primo oppure al secondo insieme di condizioni. Per questo motivo Signorini propose, per tale tipo di condizioni al contorno, il nome di *condizioni al contorno ambigue*.

Un esempio tipico di siffatti problemi di valori al contorno si ha nel problema dell'equilibrio di un corpo elastico appoggiato su una superficie rigida priva di attrito.

Sia A un corpo elastico che occupa, nella sua configurazione naturale, una regione limitata dello spazio a tre dimensioni, che indichiamo con la medesima lettera A . Supponiamo che A sia appoggiato su una superficie Σ priva di attrito e che il corpo elastico sia sottoposto a date forze di massa, nonché a date forze superficiali sulla parte $\Sigma^* = \partial A - \Sigma$ del contorno (∂A è l'intero contorno di A). Supponiamo inoltre che le forze date siano tali che il corpo sia in equilibrio.

Le condizioni d'equilibrio, considerando la teoria dell'elasticità classica, sono espresse come segue:

$$(1) \quad \sigma_{ik/k} = f_i \quad \text{in } A, \quad (2) \quad \sigma_{ik}v_k = \varphi_i \quad \text{su } \Sigma^*$$

e su Σ :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i v_i = 0 \\ \sigma_{ik} v_i v_k \geq 0 \\ \sigma_{ik} v_i \tau_k = 0 \end{array} \right. \quad oppure \quad (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i v_i > 0 \\ \sigma_{ik} v_i v_k = 0 \\ \sigma_{ik} v_i \tau_k = 0 \end{array} \right.$$

f_i e φ_i sono funzioni determinate rispettivamente dai dati sistemi di forze di massa e di superficie; σ_{ik} sono le componenti rettangolari del tensore degli sforzi, u è il vettore spostamento, v è la normale interna a ∂A ; τ è un qualsiasi vettore tangente a Σ .

Se in un punto di Σ è soddisfatto il primo insieme di condizioni, ciò significa che il corpo è ancora appoggiato su Σ , e, siccome Σ è priva di attrito, la reazione è puramente normale. Se invece è soddisfatto il secondo insieme di condizioni,

nel punto considerato il corpo si distacca dalla superficie di appoggio.

Naturalmente, le equazioni (1), (2), (3)-(4) debbono venir completate dalla *relazione sforzi-deformazioni*:

$$(5) \quad W_{\epsilon_{ik}} + \sigma_{ik} = 0,$$

dove W è il potenziale elastico, cioè una funzione data, dipendente dal tensore di deformazione ϵ , le cui componenti rettangolari sono indicate con ϵ_{ik} .

Se consideriamo il caso di un corpo isotropo ed omogeneo ed indichiamo — come al solito — con μ e λ le costanti di Lamè, si ha:

$$W(\epsilon) = \mu \epsilon_{ik} \epsilon_{ik} + \frac{1}{2} \lambda \delta_{ik} \epsilon_{ik} \epsilon_{jj}$$

e siccome $\epsilon_{ik} = 2^{-1}(u_{i/k} + u_{k/i})$, il problema analitico che deve essere risolto è il seguente:

$$(6) \quad \mu u_{i/kk} + (\lambda + \mu) u_{k/ki} + f_i = 0 \quad \text{in } A$$

$$(7) \quad T_i(u) \equiv -\{\mu u_{i/k} v_k + (\lambda + \mu) u_{k/ki} v_i + \mu (u_{k/i} v_k - u_{k/k} v_i)\} = \varphi_i \\ \text{su } \Sigma^*$$

con le *ambigue condizioni al contorno su Σ* :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} u_i v_i = 0 \\ T_i(u) v_i \geq 0 \\ T_i(u) \tau_i = 0 \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad (9) \left\{ \begin{array}{l} u_i v_i > 0 \\ T_i(u) v_i = 0 \\ T_i(u) \tau_i = 0. \end{array} \right.$$

Lo scopo del presente lavoro è di dare un teorema di esistenza ed unicità per il problema di valori al contorno (6), (7), (8) - (9).

Naturalmente non daremo qui tutti i dettagli delle dimostrazioni, che richiedono un'analisi piuttosto delicata, ma intendiamo dare solamente alcuni cenni sui risultati ottenuti e sul metodo seguito. Per i dettagli completi rimandiamo ad

un lavoro pubblicato sugli « Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei » [7].

Desideriamo osservare che il metodo impiegato ci permetterà di risolvere il problema nel caso di un corpo anisotropo non omogeneo, cioè quando $W(\varepsilon)$ ha la forma più generale

$$W(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} a_{ik,jh}(x) \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jh},$$

essendo il secondo membro una qualsiasi forma quadratica definita positiva nelle variabili ε_{ik} , i cui coefficienti sono funzioni regolari (ad esempio C^∞) nella chiusura $\bar{A}$ di A .

Nel suo lavoro [1] Signorini dimostra un teorema della minima energia per il problema al contorno (6), (7), (8)-(9). Sia U_Σ la classe degli spostamenti compatibili con i vincoli, cioè delle funzioni vettoriali u tali che:

$$u_i v_i \geq 0$$

in ogni punto di Σ . Tali condizioni corrispondono ai vincoli *unilaterali* imposti ad A , consistenti nell'appoggio su Σ . Consideriamo in U_Σ l'integrale dell'energia

$$E[u] = \int_A W(\varepsilon) dx - \int_A f u dx - \int_{\Sigma^*} \varphi u d\sigma.$$

Signorini dimostra che:

I) Se $E[u]$ assume il suo minimo nella classe delle funzioni continue con le derivate prime in $\bar{A}$, di classe $C^1(\bar{A})$, appartenenti a U_Σ , allora la funzione minimizzante è una soluzione di (6), (7), (8)-(9) ed essa è determinata a meno di uno spostamento rigido reversibile compatibile con i vincoli ⁽²⁾.

II) Se il problema (6), (7), (8)-(9) ha una soluzione u di classe $C^1(\bar{A})$, allora u minimizza $E[u]$ nella classe $C^1(\bar{A}) \cap U_\Sigma$.

(²) Lo spostamento rigido deve esser inteso nel senso dell'elasticità lineare, cioè come *spostamento rigido infinitesimale*.

L'interesse del risultato di Signorini consiste nel fatto che esso dimostra l'equivalenza del problema dei valori al contorno — con condizioni al contorno ambigue — con un problema variazionale, *allorchè la soluzione è ricercata nella classe* $C^1(\bar{A})$. Purtroppo, sia pure in casi molto semplici, il funzionale $E[u]$ non possiede un minimo in tale classe. Dimosteremo ciò in seguito, considerando un caso particolare.

Desideriamo innanzitutto osservare, seguendo Signorini, che se u minimizza $E[u]$ in $C^1(\bar{A}) \cap U_\Sigma$, allora u deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$(II) \quad \int_A \sigma_{ik}(u) \varepsilon_{ik}(v) dx + \int_A v_i f_i dx + \int_{\Sigma^*} v_i \varphi_i d\sigma \leq 0$$

per qualunque $v \in C^1(\bar{A}) \cap U_\Sigma$; $\sigma_{ik}(u)$ è il tensore degli sforzi corrispondente ad u e $\varepsilon_{ik}(v)$ il tensore di deformazione corrispondente a v . L'equivalenza delle disuguaglianze (II) con il sistema (6), (7), (8)-(9) è facilmente dimostrabile mediante semplici ragionamenti analitici. È d'altronde evidente che il sistema delle disuguaglianze (II) esprime le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del corpo elastico, in quanto, mediante un'ovvia integrazione per parti, esse esprimono il classico principio dei lavori virtuali

$$\int_{\Sigma} T_i(u) v_i d\sigma \geq 0$$

e cioè che il lavoro delle reazioni vincolari deve essere non negativo per qualsiasi spostamento ammissibile.

Le equazioni (II) illustrano il ruolo che i problemi al contorno con vincoli unilaterali giocano riguardo ai problemi classici con vincoli bilaterali (cioè vincoli per i quali gli spostamenti ammissibili sono definiti da equazioni, non da disequazioni).

Nel caso bilaterale, le *disequazioni* (II) sono sostituite da *equazioni* integrali che definiscono la *soluzione debole* del problema, laddove la varietà delle *funzioni di prova* v (spostamenti compatibili con i vincoli) è lineare. Se, invece, i vin-

coli sono unilaterali, si ha, per la *soluzione debole* u del problema al contorno, un sistema di disequazioni integrali ed una varietà non lineare per le funzioni di prova v . Infatti l'insieme U_{Σ} degli spostamenti ammissibili è un *angolo diedro convesso* dello spazio funzionale, dato che: 1) U_{Σ} è un insieme convesso, 2) se U_{Σ} contiene v , allora esso contiene tv per qualunque t non negativo, 3) U_{Σ} contiene una varietà lineare, per esempio la varietà delle funzioni regolari che hanno il loro supporto in A ⁽³⁾.

Dalle (11) Signorini ricava la seguente condizione necessaria per l'equilibrio:

$$(12) \quad \int_A \varrho_i f_i dx + \int_{\Sigma^*} \varrho_i \varphi_i d\sigma \leq 0$$

che deve esser soddisfatta per qualsiasi spostamento rigido ammissibile. Dimosteremo che la condizione (12) intesa in *senso forte* è sufficiente per l'equilibrio. Cioè, se la (12) è verificata, con il segno $<$ se ϱ è irreversibile, allora la soluzione del problema dei valori al contorno con condizioni al contorno ambigue, esiste se essa è ricercata in un'opportuna classe, che verremo a definire in seguito e che sembra più aderente al problema fisico stesso.

La condizione (12) ha un evidente significato fisico. Essa è la condizione d'equilibrio per il corpo A *considerato come un corpo rigido nella sua configurazione naturale*.

Nelle ricerche connesse con le equazioni alle derivate parziali dell'elasticità è consuetudine saggiare i metodi da impiegare, prima di tutto nel caso particolare di una singola equa-

⁽³⁾ Diseguaglianze quali le (11) sono state considerate anche molto di recente nella letteratura delle equazioni differenziali a derivate parziali ellittiche e paraboliche del secondo ordine, onde definire *subsoluzioni deboli* di tali equazioni (cfr. ad esempio [12]). Tuttavia, vi è una differenza sostanziale nella scelta dell'insieme delle funzioni di prova, in quanto nel lavoro [12] tale insieme non è un angolo diedro, ma un *cono* (funzioni non negative con supporto in A) dello spazio funzionale.

zione del 2° ordine ellittica autoaggiunta. È interessante fare questo nel nostro caso.

Il problema corrispondente al caso generale (1), (2), (3)-(4), (5) è allora il seguente:

$$(13) \quad (a_{hk}(x)w_{|k})_{|h} + f = 0 \quad \text{in } A$$

$$(14) \quad -\frac{\partial w}{\partial \lambda} \equiv -a_{hk}w_{|k}v_h = \varphi \quad \text{su } \Sigma^* = \partial A - \Sigma$$

e le condizioni ambigue su Σ :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ -\frac{\partial w}{\partial \lambda} \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad (16) \left\{ \begin{array}{l} w > 0 \\ -\frac{\partial w}{\partial \lambda} = 0. \end{array} \right.$$

Supponiamo che le funzioni reali a_{hk} siano tali che $a_{hk} = a_{kh}$ e siano di classe C^∞ in $\bar{A}$. La forma quadratica reale $a_{hk}(x)\xi_h\xi_k$ sia definita positiva per ogni $x \in \bar{A}$. A sia limitato da una superficie semplice chiusa ∂A con piano tangente variabile con continuità; $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ indichi, a meno di un fattore positivo, la differenziazione conormale.

È facile vedere che la condizione di compatibilità (12) nel caso attuale è la seguente:

$$(17) \quad \int_A f dx + \int_{\Sigma^*} \varphi d\sigma \leq 0.$$

Si assuma $f \leq 0$ ed appartenente a $C^0(\bar{A})$ e $\varphi < 0$ su Σ^* ed appartenente a $C^0(\bar{\Sigma}^*)$. Sia v una soluzione di classe $C^1(\bar{A}) \cap C^2(A)$ del problema (13), (14), (15)-(16) di Signorini. La soluzione w non ha alcun massimo positivo in A . D'altra parte w non ha punti di massimo in $\partial A - \Sigma$. Per un teorema di Giraud (cfr. [10], teor. 3.IV) segue che $w(x) \leq 0$ in $\bar{A}$ ed è, in ogni punto di Σ : $\frac{\partial w}{\partial \lambda} < 0$. Sia x_0 un punto del contorno di Σ , pensando Σ come un sottoinsieme dello spazio ∂A . Si

ha contemporaneamente in x_0 : $\frac{\partial w}{\partial \lambda} < 0$, $\frac{\partial w}{\partial \lambda} \geq 0$. Ciò prova la *non esistenza* di una soluzione w appartenente a $C^1(\bar{A})$.

Come conseguenza dell'osservazione testè fatta, dobbiamo cercare la soluzione del problema di Signorini in una classe più ampia, cioè il problema variazionale per l'integrale dell'energia deve esser considerato in una classe più ampia.

Ciò non sorprende dal punto di vista fisico, in quanto c'è da aspettarsi che gli sforzi non siano generalmente rappresentati da funzioni continue in $\bar{A}$ e possono presentarsi alcune singolarità (concentrazione di sforzi) nei punti di Σ che giacciono sul contorno della parte di Σ staccata dall'appoggio, nella configurazione d'equilibrio del corpo.

Sia f una funzione vettoriale di modulo di quadrato integrabile secondo Lebesgue in A . Si definisca

$$\|f\| = \left(\int_A |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e si consideri lo spazio S ottenuto per completamento funzionale dalle funzioni vettoriali di $C^1(\bar{A})$ mediante la norma:

$$\|u\|^2 = \|u\|^2 + \|\varepsilon(u)\|^2;$$

$\varepsilon(u)$ è il tensore di deformazione corrispondente allo spostamento u .

In opportune ipotesi per A è possibile definire la *traccia* di ogni $u \in S$ sul contorno ∂A di A ⁽⁴⁾. Tale traccia appartiene allo spazio $L^2(\partial A)$.

Definiamo ora come classe U_Σ degli spostamenti ammissibili l'insieme delle funzioni appartenenti a S e tali che la condizione (10) sia soddisfatta quasi ovunque su Σ .

Uno dei principali risultati è il seguente:

⁽⁴⁾ Una condizione sufficiente che include le regioni che generalmente si presentano nelle applicazioni, è quella che impone ad A di essere un « campo propriamente regolare », secondo una definizione data in [5], [6] (cfr. pure [4], p. 42).

I. — Date $f \in L^2(A)$ e $\varphi \in L^2(\Sigma^*)$ soddisfacenti in senso forte la condizione (I2), esiste il minimo dell'integrale dell'energia nella classe U_Σ ed è determinato a meno di uno spostamento rigido reversibile che sia ammissibile. La funzione minimante soddisfa le disequazioni (II) per ogni $v \in U_\Sigma$.

Questo teorema segue da due risultati:

I) Un'estensione della teoria di Tonelli-Morrey sul metodo diretto del Calcolo delle Variazioni per ottenere teoremi di minimo per integrali multipli.

II) Alcune maggiorazioni per le funzioni di U_Σ che permettono di provare la compattezza delle successioni minimanti per l'integrale dell'energia.

Credo sia di interesse enunciare il teorema generale di semicontinuità, in quanto esso sembra essere assai utile in molte altre applicazioni. Infatti, usando questo teorema, si può, ad esempio, estendere la teoria esistenziale dei problemi elastici (anche per vincoli unilaterali) all'elasticità non simmetrica, che è stata riconsiderata molto recentemente da diversi Autori ([8], [9], [18]). Ciò è oggetto di ricerche in corso.

Sia X^r lo spazio cartesiano r -dimensionale con il solito prodotto scalare:

$$xy = x_h y_h.$$

Sia $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un insieme ordinato di r interi non negativi e sia $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. Poniamo:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

Si considerino i due operatori differenziali matriciali L ed M :

$$L_{ih} \equiv a_{ih}^\alpha(x) D^\alpha; \quad M_{jh} \equiv b_{jh}^\beta(x) D^\beta$$

$$(i = 1, \dots, s; \quad j = 1, \dots, q; \quad h = 1, \dots, n)$$

$$(0 \leq |\alpha| \leq m; \quad 0 \leq |\beta| \leq m, \quad m \geq 1).$$

Le funzioni a_{ih}^α e b_{jh}^β siano limitate e misurabili in ogni sottoinsieme compatto di X^r . Se A è un insieme aperto limitato di X^r , i due operatori L ed M sono in particolare definiti per ogni funzione n -vettoriale $u(x)$ di $C^m(\bar{A})$.

Sia p un numero reale che, per semplicità, supporremo > 1 . Per ogni funzione vettoriale appartenente a $\mathfrak{L}^p(A)$, poniamo:

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_A |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e definiamo lo spazio S_p come ottenuto per completamento funzionale da $C^m(\bar{A})$ mediante la norma:

$$\|u\|_p^2 = \|u\|_p^2 + \|M(u)\|_p^2 + \|L(u)\|_p^2.$$

Siano Y^q e Z^s gli spazi cartesiani rispettivamente a q ed s dimensioni. I loro elementi verranno indicati con y e z rispettivamente. Supponiamo che la funzione continua a valori reali $F(x, y, z)$ sia definita nel prodotto cartesiano $X^r \times Y^q \times Z^s$ e supponiamo che:

1) per ogni $(x, y) \in X^r \times Y^q$, F sia una *funzione convessa* di z ;

2) esista una funzione convessa di z — $f_0(z)$ — tale che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-1} f_0(z) = +\infty$ e tale che, per ogni $(x, y) \in X^r \times Y^q$ ed ogni $z \in Z^s$, $F(x, y, z) \geq f_0(z)$.

Secondo una nomenclatura introdotta da Tonelli, diciamo che $u \in S$ è una *funzione ordinaria* rispetto all'integrale

$$I_A(u) = \int_A F[u, M(u), L(u)] dx$$

se $F[u(x), M(u), L(u)]$ appartiene a $\mathfrak{L}^1(A)$.

Sussiste il seguente teorema di semicontinuità:

II. — Se la trasformazione lineare $M(u)$ di S_p in $\mathfrak{L}^1(A)$ è compatta, allora l'integrale $I_A(u)$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole delle successioni di funzioni ordinarie di S_p .

Da questo teorema deriva il seguente, concernente l'esistenza del minimo assoluto di I_A .

III. — Sia C un insieme di funzioni di S_p , ordinarie rispetto all'integrale $I_A(u)$. Sia C chiuso rispetto alla convergenza debole di funzioni di S_p . Se esiste una successione di funzioni minimante I_A in C , le cui S_p -norme sono uniformemente limitate, allora I_A è dotato di minimo assoluto in C .

L'integrale dell'energia del problema di Signorini, come esempio particolare del funzionale I_A , è inferiormente semi-continuo rispetto alla convergenza debole delle successioni di S . Per applicare il teorema III deve dimostrarsi la limitatezza uniforme delle norme di una successione minimante.

Si consideri il caso particolare del problema (13), (14), (15)-(16). In tale caso l'integrale dell'energia è il seguente:

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_A a_{ik} u_{,i} u_{,k} dx - \int_A f u dx - \int_{\Sigma^*} \varphi u d\sigma.$$

La classe U_Σ delle funzioni ammissibili è costituita da tutte le funzioni a valori reali con integrale di Dirichlet finito e traccia quasi ovunque non negativa su Σ .

Se si suppone che $f \in L^2(A)$ e $\varphi \in L^2(\Sigma^*)$ e che sia soddisfatta la condizione di compatibilità (17), allora non è difficile vedere che la condizione del teorema III per una successione minimante è soddisfatta allorché per ogni $u \in U_\Sigma$ sussiste la seguente disuguaglianza

$$(18) \quad \inf_{c \in U_\Sigma} \{ \|u - c\|^2 + \|u - c\|_{\Sigma^*}^2 \} \leq k \|u_{,ik}\| \|u_{,ik}\| \quad (5)$$

ove c è una costante non negativa e $\inf \{ \|u - c\|^2 + \|u - c\|_{\Sigma^*}^2 \}$ significa che per ogni $u \in U_\Sigma$ viene considerato l'estremo inferiore di $\|u - c\|^2 + \|u - c\|_{\Sigma^*}^2$ al variare di c nell'insieme dei numeri reali non negativi; k è una costante dipendente unicamente da A .

(5) $\| \cdot \|_{\Sigma^*}$ indica la norma in $L^2(\Sigma^*)$.

È facile provare che effettivamente sussiste la disuguaglianza (18).

Ritornando all'elasticità, l'analoga della (18) sarebbe la seguente disuguaglianza

$$(19) \quad \inf_{\varrho \in U_{\Sigma}} \{ \|u - \varrho\|^2 + \|u - \varrho\|_{\Sigma^*}^2 \} \leq k \|\varepsilon(u)\|^2$$

ove ϱ è ora uno spostamento rigido e l'estremo inferiore deve essere considerato quando ϱ varia nella classe degli spostamenti rigidi ammissibili. Si presenta ora una circostanza del tutto inaspettata: l'analoga del problema elastico con il problema ellittico del secondo ordine non sussiste in questo caso. Infatti la disuguaglianza (19) non è in generale vera. È necessario condurre un'analisi più delicata. Ciò richiede però troppi dettagli tecnici per essere esposta in questa sede, per cui rimandiamo al già citato lavoro [7] delle Memorie dei Lincei.

Vogliamo soltanto dire che, tuttavia, anche nel caso dell'elasticità, se la condizione di compatibilità (12) è soddisfatta in senso forte, le successioni minimanti sono uniformemente limitate nella norma di S .

Una parte del lavoro riguarda le proprietà di regolarità della funzione minimante.

Con metodi ormai classici è possibile provare che se $f \in C^{0h}(\bar{A})$ (cioè f è hölderiana uniformemente in $\bar{A}$) e $\varphi \in C^{0h}(\bar{\Sigma}^*)$, allora $u \in C^2(A)$ ed è differenziabile con continuità su ogni parte di Σ^* che è contenuta in un pezzo di superficie C^{1h} (superficie con piano tangente variabile con continuità hölderiana). Allora u soddisfa le equazioni (1), (5), (2) nel senso classico.

Riguardo alle condizioni ambigue si ha il seguente risultato.

IV. — Sia ∂A una superficie C^{1h} . Esiste una misura vettoriale $t(B)$ definita su ogni insieme di Borel di ∂A , tale che, se Γ_ρ è la superficie « parallela » a distanza ρ rispetto alla normale interna a ∂A , ν_ρ la normale interna a Γ_ρ , per ogni $v \in C^\infty(\bar{A})$ si ha:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\rho} v_i \sigma_{ik} \nu_k d\sigma_\rho = \int_{\partial A} v_i dt_i.$$

Si ponga, per ogni x nell'interno di Σ :

$$\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{|x-y| < \epsilon} \text{essenz. } u_i(y) v_i(y).$$

La misura $t(\Gamma)$ ha le seguenti proprietà:

$$\text{I)} \quad \int_{\Gamma} \tau_i dt_i = 0 \quad \text{per ogni} \quad \Gamma \subset \Sigma - \partial \Sigma,$$

$$\text{II)} \quad \int_{\Gamma} v_i dt_i \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad \Gamma \subset \Sigma - \partial \Sigma.$$

III) Se $\psi(x) > 0$, esiste un intorno V di x tale che per ogni $\Gamma \subset V$

$$\int_{\Gamma} v_i dt_i = 0.$$

Le condizioni I), II), III) sono le condizioni integrali equivalenti delle condizioni ambigue di Signorini. Esse si riducono alle condizioni di Signorini se la soluzione appartiene a $C^1(\bar{A})$. Come già osservammo, ciò generalmente non accade. D'altra parte, rappresentare le componenti del tensore degli sforzi vicino al contorno mediante funzioni d'insieme anziché con funzioni di punto, sembra essere più in conformità con il significato fisico della Meccanica dei sistemi continui.

L'ultima parte della ricerca è dedicata all'inversione del teorema della minima energia, al teorema di unicità ed alla dimostrazione della necessità della (12), intesa in senso forte, per l'esistenza della soluzione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SIGNORINI A., *Questioni di elasticità non lineare e semilineare*, « Rend. di Matematica », Roma 1959.
- [2] SIGNORINI A., *Sopra alcune questioni di Elastostatica*, « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », 1933.
- [3] CINQUINI S., *L'estremo assoluto degli integrali doppi dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, « Annali Scuola Normale Superiore », Pisa 1941.

- [4] FICHERA G., *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Annali Scuola Normale Superiore », Pisa, 1950.
 - [5] FICHERA G., *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, « Atti del Convegno Internazionale sulle Equazioni alle Derivate Parziali » (Trieste 1954), Edit. Cremonese, Roma 1955.
 - [6] FICHERA G., *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Corsi I.N.A.M., Edit. Veschi, Roma 1958.
 - [7] FICHERA G., *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Atti Acc. Nazionale Lincei », 1963 (Memorie).
 - [8] GRIOLI G., *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium*, « Ergeb. der Ang. Math. », Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.
 - [9] MINDLIN R. D., H. F., TIERSTEN, *Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity*, « Archive for Rational Mechanics e Analysis », 1962.
 - [10] MIRANDA C., *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, « Ergeb. der Math. », Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
 - [11] MORREY C. B., *Multiple integral problems in the Calculus of Variations and related topics*, « Univ. of Calif. Publications in Math. », new ser. I, 1943.
 - [12] MOSER J., *A New Proof of de Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem for Elliptic Differential Equations*, « Comm. on Pure and Appl. Mathem. », 1960.
 - [13] MUSKHELISHVILI N. I., *Some basic problems of the mathematical Theory of Elasticity*, Edit. by J. R. M. Radok, Nordhoff Groningen 1963.
 - [14] MUSKHELISHVILI N. I., *Singular Integral Equations*, Edit. by J. R. M. Radok, Nordhoff, Groningen 1953.
 - [15] STAMPACCHIA G., *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse*, « Annali di Matematica », 1952.
 - [16] TONELLI L., *Sur la semi-continuité des integrales doubles du calcul des variations*, « Acta Mathematica », 1929.
 - [17] TONELLI L., *L'estremo assoluto degli integrali doppi*, « Annali Scuola Normale Superiore », Pisa 1933.
 - [18] TOUPIN P. A., *Elastic Material with Couple-stresses*, « Archive for Rational Mechanics e Analysis », 1962.
-

Il principio di minimo nel calcolo delle variazioni.

Summary. — *A report on the developments of the minimum principle in the theory of elliptic partial differential equations* ⁽¹⁾.

Il calcolo delle Variazioni, sorto quasi contemporaneamente all'Analisi infinitesimale, ha avuto sempre un posto preminente nell'ambito della Matematica sia per l'importanza pratica dei problemi considerati sia per la profondità delle idee che ha sempre suscitato. Se oggi, a centocinquanta anni dalla morte di uno dei più potenti cultori di esso, il Lagrange, che con la considerazione del concetto di variazione suggerì ad Eulero il nome che attualmente questo capitolo porta, volessimo chiederci quale sia oggi lo stato del suo sviluppo, la risposta non sarebbe molto semplice.

Se volessimo assumere a metro dell'interesse, che il Calcolo delle Variazioni suscita oggi, il numero dei lavori che, ad esempio, il « Mathematical Reviews » classifica sotto il nome di *Calcolo delle Variazioni* dovremmo trarne conclusioni molto pessimistiche. Su circa 8.000 lavori di Matematica pura recensiti nel 1962 soltanto 24 sono di Calcolo delle Variazioni! Appena il 3 per mille.

Ma la realtà è ben diversa da quella che queste considerazioni statistiche fanno dedurre. Gli è che i concetti che sono

⁽¹⁾ The report was prepared when the author was sponsored in part by the Grant AF EOAR 63-29 through the European Office of Aerospace Research, United States Air Force.

sorti dapprima nel Calcolo delle Variazioni hanno invaso, sempre più, numerosi campi della Matematica sia pura che applicata cosicchè gli sviluppi di quei concetti vanno ricercati ormai in altri campi.

Il concetto di variazione prima, introdotto dal Lagrange, si può ritrovare sotto forme diverse, ma concettualmente analoghe, in numerosi capitoli della Matematica.

In questa esposizione noi ci proponiamo di seguire l'evoluzione che la teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali ha subito sotto l'influsso dello sviluppo del Calcolo delle Variazioni. L'influsso è stato enorme: persino le equazioni differenziali oggi vengono scritte in una forma diversa da quella classica la quale risente del concetto di variazione prima.

Noi indicheremo, a grandi linee, le tappe di questa evoluzione che — è nostra impressione — hanno importanza fondamentale non solo in Analisi, ma hanno importanza anche per una più chiara interpretazione matematica dei fenomeni fisici.

1. — Ad ogni problema relativo ad integrali multipli regolari del Calcolo delle Variazioni viene legato un problema relativo all'equazione di Eulero che è un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo ellittico. Sfruttando questo legame, Gauss e successivamente Dirichlet e poi Riemann tentarono di dedurre l'esistenza della soluzione di un problema al contorno per un'equazione differenziale da un problema di Calcolo delle Variazioni.

Dalla considerazione della funzione che fornisce il minimo dell'integrale

$$D(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx$$

fra le funzioni che assumono valori assegnati al bordo di Ω , essi tentarono di risolvere il problema di Dirichlet, fondamentale della Fisica-Matematica classica, consistente nel determinare una funzione armonica nel dominio Ω assegnati che siano i suoi valori sul bordo $\partial\Omega$ di Ω , utilizzando il fatto che l'equazione di Eulero dell'integrale (di Dirichlet) $D(u)$ è l'equazione di Laplace.

Sebbene suggestivo e fisicamente convincente questo procedimento, designato come *principio di minimo*, fu sottoposto ad una poderosa critica da Weierstrass secondo la quale l'esistenza del minimo di $D(u)$ non è una cosa ovvia.

Anche quando questa critica fu faticosamente superata, un'altra se ne aggiunse ad opera di Hadamard il quale costruì un esempio per mostrare che se i valori al contorno sono soltanto continui allora $D(u)$ può non assumere mai valori finiti. Questo esempio mostra che il principio di minimo non può condurre a risolvere il problema di Dirichlet quando i dati al contorno sono soltanto continui.

Queste critiche spinsero illustri Matematici a cercare procedimenti diversi per risolvere il problema di Dirichlet e considerevoli progressi furono fatti da Neumann, Schwarz, Poincaré, Perron, Kellogg, Wiener ecc. Con procedimenti diversi, essi provarono l'esistenza di una funzione armonica con valori continui prefissati al contorno. I risultati furono dapprima relativi al caso di domini particolari, poi Wiener [43, 44] riuscì ad assegnare le condizioni necessarie e sufficienti sui punti del contorno (condizioni di regolarità) perchè esista una soluzione continua in corrispondenza di ogni arbitraria funzione continua assegnata sulla frontiera, la soluzione assumendo in modo continuo i dati sulla frontiera. Per un'esposizione di questi metodi si possono consultare i trattati di Goursat [14], di Courant-Hilbert [7] ed il testo di Kellogg [17].

D'altra parte, altri matematici si posero il problema di indagare in qual modo si potesse superare, nel principio di minimo, lo scoglio della critica di Weierstrass.

Dopo un tentativo di C. Arzelà [3] (il lavoro fu pubblicato come tentativo ritenuto non del tutto inutile) il principio di minimo fu ripreso da Hilbert [15], Beppo Levi [20], Fubini [11], Zaremba [45], Nikodym [3], etc.

Il problema era quello di definire una classe funzionale per la quale fosse possibile dare significato alla nozione di valore al contorno e che nello stesso tempo fosse completa rispetto alla seminorma definita da $[D(u)]^{1/2}$.

Si trattava, per questo, di rivedere il concetto di funzione e di derivata quale era fissato dal calcolo differenziale classico.

Non era, del resto, la prima volta che il concetto di funzione doveva essere rivisto in modo da dare ad esso una portata più ampia.

Non possiamo qui descrivere tutti i vari contributi arrecati da questi Autori nè quelli successivi, più sistematici di Tonelli [41], di Morrey [25, 27] e di numerosi altri; diremo che lo spazio opportuno è quello che si ottiene *completando* rispetto alla norma $\|u\|_{L^2} + [D(u)]^{1/2}$ lo spazio $C^1(\bar{\Omega})$ delle funzioni derivabili con continuità. Si ottiene così uno spazio di funzioni le quali sono di quadrato sommabile insieme con le derivate prime, intese queste in un senso debole. Indicheremo questo spazio con $H^1(\Omega)$. La descrizione di questo spazio come « completamento » dello spazio delle funzioni di $C^1(\bar{\Omega})$ si deve a Friedrichs [9] ed a Sobolev [33]. Esso è, a sua volta un sottospazio di quello più vasto delle distribuzioni e le derivazioni sono da intendersi proprio nel senso di questa teoria.

Rispetto al problema considerato questo spazio appare come l'analogo dei numeri reali nel confronto con i numeri razionali.

Le funzioni di questa classe non sono necessariamente continue e pertanto l'operazione di valori al contorno o di *traccia* sulla frontiera deve essere considerato, anch'esso, come un completamento della traccia nel caso di funzioni derivabili con continuità.

Questa considerazione si collega con la seconda critica mossa al principio di minimo da Hadamard. L'operazione di traccia su $\partial\Omega$ trasforma $H^1(\Omega)$ in uno spazio di funzioni definite sulla frontiera di $\partial\Omega$, che indicheremo con $\mathfrak{T}$, il quale è stato caratterizzato anche intrinsecamente quando la frontiera di Ω è sufficientemente regolare da Aronszajn [2], da Prodi [31], etc. Detto spazio $\mathfrak{T}$ non contiene lo spazio delle funzioni continue su $\partial\Omega$. Con il principio di minimo è quindi possibile risolvere il problema di Dirichlet solo quando i valori al contorno appartengono a $\mathfrak{T}$.

Ci tornerà utile in seguito l'osservazione che lo spazio $\mathfrak{C}$ è denso nello spazio delle funzioni continue su $\partial\Omega$ (con la norma di questo secondo spazio). Infatti, ogni funzione continua su $\partial\Omega$ può essere approssimata uniformemente su $\partial\Omega$ da polinomi le cui tracce su $\partial\Omega$ ovviamente appartengono a $\mathfrak{C}$.

Un'altra osservazione che torna utile fare è che $H^1(\Omega)$, a differenza dello spazio delle funzioni derivabili con continuità, è chiuso rispetto all'operazione di troncamento; cioè se u è una funzione di $H^1(\Omega)$ anche la funzione che si ottiene troncando u superiormente o inferiormente al livello k appartiene ad $H^1(\Omega)$. Da questa osservazione discende, con ragionamento puramente variazionale, il principio di massimo per le funzioni armoniche [35, § 2].

Se u è una funzione armonica in $H^1(\Omega)$ si ha:

$$\max_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Infatti se $\max_{\partial\Omega} |u| = \Phi$ è finito allora la funzione v , ottenuta troncando u superiormente a Φ ed inferiormente a $-\Phi$ è una funzione ammissibile che fornisce all'integrale $D(v)$ un valore non superiore a $D(u)$. Poichè la minimizzante è unica, si deduce che la funzione così ottenuta non può differire dalla u stessa, e quindi: $-\Phi \leq u \leq \Phi$.

Consideriamo ora dei valori continui sulla frontiera di un dominio limitato e del resto qualunque. Approssimiamo questi con valori π_m appartenenti allo spazio $\mathfrak{C}$ a ciascuno dei quali corrisponde mediante il principio di minimo una funzione armonica u_m . A causa del principio di massimo su richiamato, $\{u_m\}$ converge uniformemente ad una funzione limite che è armonica in Ω , la quale resta associata univocamente ai valori continui prefissati sulla frontiera.

Così il principio di minimo insieme al principio di massimo risolve il problema, considerato da Perron, Wiener etc., di associare ad ogni dato continuo sulla frontiera di un qualunque dominio una ben determinata funzione armonica.

Si presenta ora il problema di sapere se la funzione armonica così associata ai valori continui sulla frontiera assume questi in modo continuo. Che in generale questo non sia il caso fu provato da un esempio del Lebesgue. Diremo allora che un punto frontiera y è *regolare* se, detta $B(h)$ la funzione armonica associata ai valori al contorno h , si ha per ogni h continua su $\partial\Omega$

$$\lim_{x \rightarrow y} B(h) = h(y)$$

La caratterizzazione dei punti regolari è legata al problema della capacità di un insieme che può essere anche trattato in modo variazionale.

Sofferamoci un momento su di esso. Sia S una sfera fissata che considereremo come spazio ambiente e sia E un insieme chiuso interno ad S .

Consideriamo l'insieme $\mathcal{E}$ delle funzioni u di $H^1(\Sigma)$, nulle su $\partial\Sigma$, tali che $u \geq 1$ su E [21, § 4]. Si pone

$$\text{cap } E = \inf_{u \in \mathcal{E}} D(u)$$

Si dimostra che esiste il minimo di questo problema variazionale e tale minimo è ottenuto da una funzione u di $\mathcal{E}$ che prende il nome di *potenziale capacitario*. Essa è una funzione, uguale ad 1 su E , che soddisfa la condizione

$$\int_{\Sigma} \text{grad } u \times \text{grad } \varphi \, dx \geq 0$$

per ogni funzione φ di $H^1(\Sigma)$, nulla su $\partial\Sigma$ e non negativa su E . Ne segue allora che esiste una misura positiva μ , detta *distribuzione capacitaria*, tale che

$$\int_{\Sigma} \text{grad } u \times \text{grad } \varphi \, dx = \int_{\Sigma} \varphi \, d\mu$$

per ogni φ di $H^1(\Sigma)$, nulla su $\partial\Sigma$. Cioè, nel senso della teoria delle distribuzioni, il potenziale capacitario u (o di equilibrio) soddisfa l'equazione

$$\Delta u = \mu$$

ove μ è la distribuzione capacitaria avente il suo supporto sulla frontiera di E . Inoltre si ha:

$$\text{cap } E = \int d\mu.$$

Questo problema, che traduce analiticamente il problema dell'equilibrio delle cariche elettriche distribuite su un conduttore, fu trattato rigorosamente, con un diverso procedimento variazionale, da Frostman [10]. Esso differisce dagli ordinari problemi di Calcolo delle Variazioni perchè la minimante non è « interna » ma di « frontiera ».

Ritornando allora alla questione di regolarità per il problema di Dirichlet, si può dimostrare che un punto y della frontiera di un dominio Ω è regolare se e solo se il potenziale capacitario degli insiemi $\complement\Omega \cap I(y, \varrho)$ ($\complement\Omega$ è il complementare di Ω ed $I(y, \varrho)$ è la sfera di centro nel punto y e raggio ϱ) è continua nel punto y per ogni ϱ sufficientemente piccolo.

Wiener [43, 44] ha dimostrato che:

Detta $c(r)$ la capacità dell'insieme $E_r = (\Sigma - \Omega) \cap I(y, r)$ il punto y è regolare se e solo se

$$\int_0 c(r) r^{1-n} dr = +\infty$$

n essendo la dimensione dello spazio ambiente.

Il problema di estendere questo risultato ad equazioni di tipo ellittico del secondo ordine è stato studiato da vari Autori. Citiamo Puschel, Tautz, Olëinik ed Hervé (rinviamo ad [21] per la bibliografia). Recentemente in un lavoro in collaborazione W. Littman, H. Weinberger e me stesso [21] abbiamo considerato il problema di Dirichlet per la equazione: ⁽¹⁾

$$Lu = - (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} = 0$$

quando i coefficienti sono supposti essere soltanto funzioni limitate e misurabili, ($a_{ij} = a_{ji}$), soddisfacenti la condizione

(1) Il simbolo di sommatoria è sottinteso qui e nel seguito.

di ellitticità:

$$c^{-1} |\xi|^2 \leq a_{ij} \xi_i \xi_j \leq c |\xi|^2 \quad (c \text{ costante } \geq 1) .$$

Assegnati i valori al contorno continui, si dimostra, in modo analogo a quanto detto precedentemente nel caso del Laplaciano, che esiste una ed una sola soluzione dell'equazione $Lu = 0$ associata ad essi. Per soluzione si deve intendere qui una funzione u che sia in $H^1(\Omega')$, per ogni Ω' che appartenga con la sua chiusura ad Ω , la quale soddisfi la relazione

$$\int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} dx = 0$$

per ogni funzione φ indefinitamente derivabile ed a supporto contenuto in Ω . Una tale funzione, per un fondamentale teorema di De Giorgi [8] (vedi anche [28]), è una funzione continua (anzi hölderiana) nell'interno di Ω .

Il fatto che la soluzione è continua nell'interno di Ω fa ripresentare anche qui l'analogo problema di sapere se la soluzione assume in modo continuo i valori al contorno che l'hanno determinata. Si tratta cioè di studiare la regolarità dei punti frontiera rispetto all'equazione: $L(u) = 0$. Nel lavoro citato abbiamo dimostrato che un punto frontiera è regolare rispetto all'equazione $L(u) = 0$ se e solo se esso è regolare rispetto al Laplaciano. In altre parole la condizione di Wiener è necessaria e sufficiente perchè assegnati comunque dati al contorno continui la soluzione ad essi corrispondente li assuma in modo continuo sul contorno.

Non possiamo qui entrare nei particolari delle dimostrazioni necessarie per giungere a questo risultato. Diremo però che abbiamo dovuto utilizzare a fondo i recenti risultati relativi alle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui; oltre al risultato di De Giorgi, già citato, abbiamo dovuto utilizzare l'estensione di questo alla frontiera per equazioni non omogenee dovuto a C. B. Morrey [26] e a me stesso [36], e anche una profonda estensione della classica disuguaglianza di Harnack dovuta a Moser [28]. Ricorderemo però

qualche risultato al quale siamo giunti. Primo fra tutti, abbiamo dimostrato che, per il problema di Dirichlet relativo all'operatore $L(u)$, esiste una funzione di Green continua fuori del polo e dotata di derivate prime sommabili con ogni esponente minore di $n/(n-1)$ [21, § 6]. Due funzioni di Green: $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ relative allo stesso polo e a due operatori ellittici L_1u e L_2u sono tali che, in ogni compatto di Ω , si ha:

$$0 < m \leq g_1(x, y)/g_2(x, y) \leq M < +\infty$$

dove m e M sono due costanti dipendenti solo dal compatto considerato e dalle costanti di ellitticità. Ne segue che la funzione di Green relativa ad ogni operatore del tipo $L(u)$ ha nel polo y esattamente la stessa singolarità polare, come nel caso del laplaciano, di ordine $n-2$ [21, § 7].

Di più, abbiamo dimostrato che è possibile definire la soluzione del problema di Dirichlet, con valori nulli al contorno, per l'equazione:

$$L(u) = \mu$$

essendo μ una misura a variazione limitata. La soluzione è data dalla formula:

$$u(x) = \int g(x, y) d\mu(y)$$

essendo $g(x, y)$ la funzione di Green dell'operatore $L(u)$. Queste proprietà permettono di dimostrare che se la distribuzione capacitaria degli insiemi $\mathcal{C}\Omega \cap I(y, \varrho)$ sono continue nel punto y , rispetto ad un operatore $L(u)$ altrettanto avviene rispetto ad ogni altro operatore ellittico dello stesso tipo.

Aperta è la questione di estendere il risultato agli operatori del tipo $L(u)$ con termini di ordine inferiore.

2. — Ma il principio di minimo si presta a studiare una più vasta classe di problemi al contorno per equazioni lineari e non lineari.

Il tempo non ci permette di addentrarci negli sviluppi della teoria delle equazioni non lineari ottenuti, con metodi

non variazionali, da S. Bernstein, Schauder, Caccioppoli, Leray, Morrey, Nirenberg etc. (si veda per un'esposizione [24]). Questa teoria delle equazioni ha fornito anche notevoli risultati di Calcolo delle Variazioni. Ma difficoltà sorsero quando si tentò di estendere questi risultati alle equazioni in più di due variabili.

Per ricordare invece alcuni sviluppi nell'indirizzo variazionali, dobbiamo dire che fra i primi a vedere una vasta possibilità di applicazione del principio di minimo fu il Fubini, i cui lavori sull'argomento, per quanto poco noti, contengono molte idee che sono state sviluppate solo più recentemente. Ma chi pose alla base dello studio dei problemi della Fisica-matematica, in modo sistematico, il metodo di minimo, fu la scuola di Hilbert con Courant, Friedrichs e Lewy [6]. I risultati di questa scuola sono esposti nel ben noto trattato di Courant di cui sta uscendo un'ampliata edizione in inglese [7].

In Italia il Calcolo delle Variazioni ebbe un fortissimo sviluppo ad opera di L. Tonelli che vi introdusse la nozione di semicontinuità. I suoi interessi però furono rivolti a problemi di natura più geometrica che analitica. Ricordo ancora le sue chiare lezioni sul Calcolo delle Variazioni. I nuovi metodi, Egli diceva, hanno reso il Calcolo delle Variazioni indipendente dalla teoria delle equazioni differenziali. Questa affermazione è ancora vera, ma oggi, possiamo aggiungere, la teoria delle equazioni differenziali si avvale ormai dei metodi del Calcolo delle Variazioni.

Sia $f(x, u, p)$ una funzione di $2n + 1$ variabili dove $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ definita e continua con le derivate per x variabile in un dominio Ω e per u, p variabili comunque. Sia inoltre la forma quadratica

$$f_{p_i p_j}(x, u, p) \xi_i \xi_j$$

definita positiva per tutti i valori di x, u, p e consideriamo l'integrale multiplo regolare

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \text{grad } u) dx.$$

La variazione prima di tale integrale è:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \{f_u(x, u, p) \delta u + f_{p_i}(x, u, p) (\delta u)_{x_i}\} dx = 0$$

e l'equazione di Eulero è:

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f_{p_i}(x, u, p) - f_u(x, u, p) = 0$$

la quale è un'equazione del secondo ordine non lineare di tipo ellittico.

Se, più specificatamente, supponiamo che

$$(3) \quad c^{-1} |\xi|^2 \leq f_{p_i p_i}(x, u, p) \xi_i \xi_j \leq c |\xi|^2; \quad c \geq 1,$$

i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni provano l'esistenza di almeno una minimante in ogni classe di funzioni di $H^1(\Omega)$ che sia chiusa rispetto alla convergenza debole di $H^1(\Omega)$. Sono, ad esempio, chiuse rispetto alla convergenza debole di $H^1(\Omega)$:

1) la classe di funzioni che assumono valori assegnati su $\partial\Omega$,

2) la classe delle funzioni che assumono valori assegnati su una porzione $\partial_1\Omega$ di $\partial\Omega$,

3) la classe di tutte le funzioni di $H^1(\Omega)$.

Una tale funzione minimizzante fornisce una soluzione « debole » 1) del problema di Dirichlet, 2) del problema misto di Dirichlet-Neumann, 3) del problema di Neumann. Questo significa che una funzione minimizzante annulla la variazione prima (1) per ogni δu tale che sia 1) nulla sul contorno, 2) nulla su $\partial_1\Omega$, 3) arbitraria.

Il problema che a questo punto nasce è quello della regolarizzazione di tali soluzioni deboli. Si tratta cioè di sapere quando una tale soluzione è una soluzione nel senso classico della parola. Si inserisce qui anche una famosa congettura di Hilbert secondo cui una soluzione di un tale problema con dati analitici è analitica. In realtà la formulazione di questa congettura di Hilbert non si riferiva a tali soluzioni deboli,

ma essa, come congettura, si può formulare anche per siffatte soluzioni.

Un primo passo in questa direzione fu compiuto provando che le derivate prime della soluzione appartengono ad $H^1(\Omega')$ per ogni compatto Ω' interno ad Ω [34]. Fu poi De Giorgi, che compì il passo decisivo nella risoluzione di questo problema [8].

Nel caso che la funzione f sia indipendente da x e da u , egli riuscì a provare, con metodi nuovi, che la soluzione debole è dotata di derivate prime hölderiane nell'interno di Ω .

Dedurre di qui l'ulteriore regolarità della soluzione o anche provare la congettura di Hilbert è cosa divenuta ormai standard dopo i contributi di numerosi matematici come Hopf [16], Morrey etc.

Il risultato di De Giorgi può essere esteso al caso in cui f dipende anche da x e da u , utilizzando un risultato provato da C. B. Morrey [26] e da me stesso [36]. Ulteriori generalizzazioni sono state ottenute indipendentemente da C. B. Morrey [27 bis] e da Ladyzhenskaya e Ural'tseva [18, 19] quando, in luogo della (3), è verificata una condizione del tipo:

$$(4) \quad c^{-1}(1 + p^2)^\tau \leq \leq f_{p_i p_j}(x, u, p) \xi_i \xi_j \leq c(1 + p^2)^\tau |\xi|^2$$

dove $\tau > -1/2$.

Vi sono problemi che sfuggono a questi risultati; ad esempio quello delle superfici minime dove

$$f = (1 + p^2)^{1/2}.$$

Questo problema rientra invece in alcuni risultati che sono stati recentemente trovati indipendentemente da Gilbarg [13] e da me stesso [35]. Fra questi ricorderò il seguente:

Esiste una minimante regolare dell'integrale:

$$\int_{\Omega} f(\text{grad } u) dx$$

nella classe delle funzioni lipschitziane in Ω che assumono valori al contorno abbastanza regolari sotto l'ipotesi che $f(p)$ sia convessa ed Ω sia un dominio convesso.

Questo risultato costituisce un'estensione a più dimensioni di un classico teorema di Haar.

Con un procedimento di approssimazione, come quello considerato nella prima parte per le equazioni lineari, sarebbe possibile attenuare le ipotesi di regolarità sui dati al contorno.

Il metodo di minimo ha però la limitazione di potersi applicare soltanto alle equazioni che sono equazioni di Eulero, cioè del tipo (2). Ma è possibile definire in modo analogo le soluzioni « deboli » di un problema al contorno, con condizioni al contorno nulle, di un'equazione generale quasi lineare del tipo:

$$(5) \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, \text{grad } u) + a(x, u, \text{grad } u) = 0.$$

Indichiamo con $H_0^1(\Omega)$ il sottospazio delle funzioni di $H^1(\Omega)$ che sono nulle su $\partial\Omega$ e sia V una qualunque varietà tale che (algebricamente e topologicamente):

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega).$$

Si dice che u è soluzione di un problema al contorno per l'equazione (5) se: $u \in V$ e inoltre

$$(6) \quad \int_{\Omega} \{a_i(x, u, \text{grad } u)v_{x_i} + a(x, u, \text{grad } u)v\} dx = 0$$

per ogni $v \in V$. È ovvio che questa definizione è una evidente generalizzazione della variazione prima di un integrale multiplo, e allo stadio attuale è il più naturale modo di tradurre in termini matematici i problemi della Fisica-Matematica.

Osserviamo che la relazione (6) assorbe sia l'equazione (5), che si ottiene con integrazione per parti restringendo v a variare in $H_0^1(\Omega)$, sia le condizioni al contorno del problema.

Nel caso $V = H_0^1(\Omega)$, cioè per il problema di Dirichlet, recentemente risultati in proposito sono stati ottenuti da Ladyzhenskaya e Ural'teva [18, 19].

Consideriamo il caso che le funzioni a ed a_i siano funzioni lineari cioè che si abbia:

$$(7) \quad \int_{\Omega} [\{a_{ij}(x)u_{x_j} + b_i(x)u\}v_{x_i} + \{d_j(x)u_{x_j} + e(x)u\}v]dx = \\ = \int_{\Omega} \{c_i(x)v_{x_i} + fv\}dx.$$

L'esistenza della soluzione debole si può studiare in diversi modi. Essi sostanzialmente poggiano sul metodo delle proiezioni ortogonali che è intimamente legato ad una formulazione generalizzata del principio di minimo. Anche il teorema di Hahn-Banach può essere utilizzato allo stesso scopo.

Osserviamo qui che un'equazione del secondo ordine a coefficienti regolari può essere sempre posta sotto la forma variazionale (7). Ciò non è più vero se i coefficienti dei termini di secondo grado sono discontinui. Le equazioni del tipo

$$a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} + cu = f$$

quando i coefficienti a_{ij} sono misurabili e limitati rimangono ancora avvolte nel mistero se il numero delle variabili supera due.

Invece per le equazioni del tipo (7) anche se i coefficienti a_{ij} sono supposti misurabili e limitati e gli altri coefficienti ed i termini noti sono supposti essere di opportune potenze sommabili, risultati nuovi sono stati ottenuti da C. B. Morrey [26] nel caso del problema di Dirichlet e da me stesso nel caso generale qui considerato [36]. Proprietà di sommabilità, di limitatezza e di hölderianità della soluzione sono state studiate [37, 38, 39, 40]. Recentemente alcuni di questi risultati sono stati oggetto di una nota di Miranda [23].

3. — Ci siamo fino ad ora limitati a considerare problemi relativi ad equazioni del secondo ordine, ma non si può, seppur rapidamente, non accennare agli sviluppi della teoria delle equazioni di ordine superiore, iniziati una decina di anni fa con un lavoro di Gårding sul problema di Dirichlet [12].

A questo scopo premettiamo qualche notazione. Se $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ è un sistema di indici non negativi, porremo

$$D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad D^\mu = D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} \dots D_n^{\mu_n} = \frac{1}{i^{|\mu|}} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}}$$

dove $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$.

Indichiamo con $H^m(\Omega)$ il completamento delle funzioni indefinitamente derivabili in $\overline{\Omega}$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\mu| \leq m} \|D^\mu u\|_{L^2(\Omega)}$$

e con $H_0^m(\Omega)$ la chiusura in $H^m(\Omega)$ delle funzioni, indefinitamente derivabili con supporto compatto in Ω .

Consideriamo un operatore differenziale della forma

$$Au = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q u)$$

ed associamo ad esso la forma

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) D^q u \overline{D^p v} dx$$

Sia ora V una varietà lineare chiusa tale che

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega);$$

diremo che: $u \in V$ soddisfa un problema al contorno con dati omogenei al contorno per l'equazione

$$Au = f$$

dove f , ad esempio, è di quadrato sommabile se

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx$$

per ogni $v \in V$.

Si dimostra che la condizione

$$\Re \{a(v, v)\} \geq \alpha \|v\|_{H^m(\Omega)}^2 \quad (\alpha > 0)$$

per ogni v di V , è sufficiente ad assicurare l'esistenza di una soluzione debole del problema.

Gli sviluppi della teoria sono stati così rapidi ed abbondanti che è impossibile seguirli qui nello scorcio di tempo di una conferenza.

Ricorderemo soltanto che nelle ipotesi che i coefficienti ed il dominio siano regolari è possibile conseguire la regolarizzazione della soluzione utilizzando il metodo di Nirenberg [29]. Utilizzando metodi di dualità, di interpolazioni e di continuità è possibile passare da risultati relativi a soluzioni variazionali (con norma in $H^m(\Omega)$ finita) a risultati di tipo non variazionali.

Oltre ai risultati di Agmon, Douglis e Nirenberg [1], ulteriori risultati sono stati recentemente ottenuti da Schechter e da Lions e Magenes (per un'esposizione si veda [22], parte II). Ancora più recenti risultati tendono a considerare il problema quando alcune delle condizioni di regolarità richieste non sono soddisfatte. Agmon mi ha comunicato di avere risultati relativi al caso che il dominio Ω abbia la frontiera con « spigoli ».

Molto promettente di risultati sembra lo studio dei problemi al contorno per equazioni quasi lineari di ordine superiore. A mio parere sarebbe molto interessante indagare le condizioni di semicontinuità nei casi che le equazioni provenivano da un integrale multiplo dipendente dalle derivate di ordine superiore; i risultati noti in proposito sembrano ancora frammentari.

Con metodi diversi recentemente il problema dell'esistenza delle soluzioni deboli è stato iniziato in alcune note dei Doklady da Visik [42]. Altri risultati sono in via di pubblicazione ad opera di Browder. Citeremo fra i risultati di quest'ultimo il seguente [5], relativo agli operatori della forma

$$Au = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|q|} D^q \{a_{pq}(x, u, \dots, D^m u) D^p u\}$$

dove, per semplicità, supponiamo i coefficienti oltre che regolari limitati al variare comunque dei suoi argomenti.

Consideriamo la forma non lineare

$$a(u, v) = \int_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{pq}(x, u, \dots, D^m u) D^p u \overline{D^q v}$$

e supponiamo che la seguente condizione sia soddisfatta.

Esiste una funzione non decrescente $c(r)$ con $\int_1^{+\infty} c(r) dr = +\infty$ tale che, per ogni coppia di funzioni u, u_1 in V si abbia

$$\Re \{a(u, u - u_1) - a(u_1, u - u_1)\} \geq c(\max \|u\|_{H^m}, \|u_1\|_{H^m}) \cdot \|u - u_1\|_{H^m}^2.$$

Allora, se f è una funzione di quadrato sommabile esiste una soluzione debole del problema al contorno relativo alla varietà V fissata. Più precisamente esiste una funzione $u \in V$ tale che, per ogni v in V , si abbia

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Come si vede questa condizione è una generalizzazione di quella citata prima nel caso di equazioni lineari.

Ulteriori risultati relativi ad una classe molto più vasta della precedente sono stati ottenuti da F. Browder. In questa nuova impostazione vengono incluse anche le equazioni di Eulero di integrali multipli dipendenti dalle derivate di ordine superiore [4]. E per finire ricorderemo che S. Smale ha recentemente esteso la teoria di M. Morse alle equazioni non lineari alle derivate parziali, affrontando con metodi differenti lo studio del problema di Dirichlet [32].

BIBLIOGRAFIA

- [1] AGMON S., A. DOUGLIS e L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*, «Comm. Pure Appl. Math.» Vol. 12 (1959).
- [2] ARONSZAJN N., *Boundary value of functions with finite Dirichlet integral*, Tech. Report n. 14 Univer. of Kansas (1955) pp. 77-94.

- [3] ARZELÀ C.: *Sul principio di Dirichlet*, « Acc. Sc. Bologna » (1897).
- [4] BROWDER F., *Non-linear elliptic boundary value problems*, Bull. A. M. S. Vol. 69, 862-874 (1963).
- [5] BROWDER F., *On the solvability of non-linear functional equations*. « Duke Math. Journal » (in corso di stampa).
- [6] COURANT R., K. O. FRIEDRICHS e H. LEWY, *Über die partiellen Differenzengleichungen der Physik*, Math. Ann., Vol. 100 (1928-29) pp. 32-74.
- [7] COURANT R. e D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II (1962) « Interscience Publishers » (New York).
- [8] DE GIORGI E., *Sulla differenzialità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, « Mem. Accad. Sc. Torino Cl. Scienze Fis. Mat. » (3) 3 (1957), 25-43.
- [9] FRIEDRICHS K. O., *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, « Trans. Am. Math. Soc. », Vol. 55 (1944) pp. 132-151.
- [10] FROSTMAN O., *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, « Thèse pour le doctorat », Lund (1935) pp. 1-118.
- [11] FUBINI G., *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », Vol. 23 (1907) pp. 58.
- [12] GÄRDING L., *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, « Math. Scand. » I (1953), pp. 55-72.
- [13] GILBARG D., *Boundary value problems for non-linear elliptic equations in n variables*, « Symposium on nonlinear problem », Madison (Wisconsin), April 30-May 2, 1962.
- [14] GOURSAT E., *Cours d'Analyse Mathématique*, Paris (1942).
- [15] HILBERT D., *Über das Dirichletsche Prinzip*, « Math. Ann. », Vol. 59 (1904) pp. 161-186.
- [16] HOPF E., *Zum analytischen Charakter der Lösungen regularer zweidimensionaler Variationsprobleme*, Math. Z. 30, pp. 404-413 (1929).
- [17] KELLOGG O. D., *Foundations of potential theory*, Berlin (1929).
- [18] LADYZENSKAJA O. A. e URALT'SEVA N. N., *Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables*, « Uspehi Matem. Nauk. », Vol. 16 (1961) transl. Vol. I, pp. 17-91.
- [19] LADYZENSKAJA O. A. e URALT'SEVA N. N., *On the smoothness of weak solutions of quasi-linear equations in several variables and of variational problems*, « Comm. Pure Appl. Math. » 14 (1961) pp. 481-495.
- [20] LEVI B., *Sul principio di Dirichlet*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », Vol. 22 (1906), pp. 293-359.

- [21] LITTMAN W., G. STAMPACCHIA e H. WEINBERG, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, « Ann. Scuola Normale Sup. Pisa », Vol. 17 (1963), pp. 43-77.
- [22] MAGENES E., *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali*. Conferenza tenuta al VII Congresso dell'Unione Matematica Italiana; Genova (30 sett.-5 ott. 1963).
- [23] MIRANDA C., *Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L' delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine*, « Ann. di Matematica » Vol. 61 (1963), pp. 151-170.
- [24] MIRANDA C., *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, « Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete » (N. F.), Heft 2, Springer, Berlin, 1955.
- [25] MORREY C. B. JR., *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, « Univ. California Publ. Math. », Vol. I (1943), pp. 1-130.
- [26] MORREY C. B. JR., *Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity*, Math. Z. 72 (1959), 146-164.
- [27] MORREY C. B. JR., *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, « Ann. Sc. Normale Sup. Pisa », Vol. 14, pp. 1-62 (1960).
- [27] bis MORREY C. B. JR., *Existence and differentiability theorems for variational problems for multiple integrals*, « Partial differential equations and continuum mechanics », Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1961.
- [28] MOSER J., *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, « Comm. Pure Appl. Math. », Vol. XIV (1961), pp. 577-591.
- [29] NIRENBERG L., *Estimates and existence of solutions of elliptic equations*, « Comm. Pure Appl. Math. », Vol. 9 (1959), pp. 509-530.
- [30] NIKODYM O., *Sur une classe de fonctions considérée dans l'étude du problème de Dirichlet*, « Fund. Math. », Vol. 21 (1933), pp. 129-150.
- [31] PRODI G., *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, « Rend. Sem. Mat. Padova », Vol. 26 (1956), pp. 36-60.
- [32] SMALE S., *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem*, « Columbia Univ. », Dept. of Mathem.
- [33] SOBOLEV S. L., *On a theorem of functional analysis*, « Mat. Sbornik », N. S. Vol. 4 (1938), pp. 471-497.
- [34] STAMPACCHIA G., *Sistemi di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli*, « Ricerche di Matematica », Vol. I (1952), pp. 200-226.
- [35] STAMPACCHIA G., *On some regular multiple integral problems in the calculus of variations*, « Comm. Pure Appl. Math. », Vol. XVI (1963).

- [36] STAMPACCHIA G., *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (IV) 51 (1960), pp. 1-38.
 - [37] STAMPACCHIA G., *Some limit cases of L^p estimates for solutions of second order elliptic equations*, « Comm. Pure Appl. Math. », Vol. XVI, 505-510 (1963).
 - [38] STAMPACCHIA G., *Equations elliptiques à données discontinues*, « Seminaire Schwartz » (1960-61).
 - [39] STAMPACCHIA G., *Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues*, « Intern. Symp. on Lin. Spaces, Jerusalem (1960).
 - [40] STAMPACCHIA G., *Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine ellittiche*, « Annali Sc. Normale Sup. Pisa », Serie III, Vol. XII, Fasc. III (1958), pp. 223-245.
 - [41] TONELLI L., *L'estremo assoluto degli integrali doppi*, « Annali Scuola Normale Sup. Pisa », Vol. 2 (1933), pp. 89-130.
 - [42] VISIK M. I., *Boundary value problems for quasi-linear strongly elliptic systems in divergence form.*, « Dokl. Akad. Nauk. ». Vol. 138 (1961), pp. 518-521.
 - [43] WIENER N., *The Dirichlet problem*, « J. Math. and Phys. », Vol. 3 (1929), pp. 127-146.
 - [44] WIENER N., *Certain notions in potential theory*, « J. Math. and Phys. ». Vol. 3 (1929), pp. 24-51.
 - [45] ZAREMBA S., *Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann*, « J. Math. Pures Appl. », Vol. 6 (1927), pp. 127-163.
-

Sur le problème de Riemann-Hilbert.

Résumé. — *On propose une modification de la méthode de G. D. Birkhoff pour la résolution du problème de Riemann-Hilbert à N contours.*

I. — Au tome II des *Miscellanea Taurinensia* Joseph-Louis Lagrange publiait son « Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies », Mémoire célèbre qui se situe à l'origine même du Calcul des Variations; et, pour illustrer la portée et la fécondité des ses méthodes, l'auteur montrait dans un Appendice qu'elles s'appliquent aux maximums et aux minimums des intégrales doubles, par exemple au problème de « trouver la surface qui est la moindre de toutes celles qui ont un périmètre donné ». C'était le problème qu'on appelle aujourd'hui « le problème de Plateau », en mémoire du physicien belge qui l'a abordé expérimentalement. Du résultat de Lagrange il suivait aussitôt que la surface qui répond à la question doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Après les beaux travaux de Monge et de Legendre sur cette équation, Weierstrass reprenait le problème de Lagrange pour les polygones gauches Γ . Il établissait que les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface sont de la forme

$$\begin{aligned}x_1 &= \Re \int [G^2(x) - H^2(x)] dx, & x_2 &= \Re i \int [G^2(x) + H^2(x)] dx, \\x_3 &= \Re 2 \int G(x) H(x) dx,\end{aligned}$$

où $G(x)$ et $H(x)$ sont les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, solutions dont le groupe de monodromie $\mathfrak{G}$ se construit aisément à partir de l'orientation des côtés de Γ . La détermination de G et H à partir de $\mathfrak{G}$ (les points singuliers étant donnés) n'est autre que le problème de Riemann; nous voudrions apporter dans cette Note une contribution à la résolution effective de ce problème.

2. - Rappelons d'abord quelques faits classiques. Le problème de Riemann peut être formulé comme suit: étant donnés, dans le plan complexe (x) N points $t_1, \dots, t_N$ reliés par une courbe C fermée, sans point double, sur laquelle les t_i se succèdent dans l'ordre croissant des indices ($t_{N+1} = t_1$), déterminer deux matrices carrées d'ordre m , $F^+(x)$ et $F^-(x)$ holomorphes respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de C ($F^-(x)$ pouvant être méromorphe en $x = \infty$) et telles que

$$(I) \quad F^+(x) = A(x)F^-(x), \quad (x \in C),$$

la matrice carrée, d'ordre m , $A(x)$ étant définie sur C et coïncidant sur l'arc $\widehat{t_{i-1}t_i}$ de C avec une matrice constante A_i .

Dans le cas du problème de Plateau on a $m = 2$ et les A_i définissent des symétries autour des côtés de Γ ; les $A_{i-1}^{-1}A_i$ constituent une base de $\mathfrak{G}$. Pour résoudre ce problème (avec $m = 2$) on dispose de trois méthodes, à notre connaissance; elles sont dues à M. Plemelj [1], à G. D. Birkhoff [2] et à nous-même [3]. Nous ne nous occuperons ici que de la méthode de Birkhoff.

3. - Birkhoff suppose essentiellement que la courbe C est analytique, et il résout d'abord un problème préliminaire (problème de Riemann-Hilbert). Ce problème s'énonce comme celui de Riemann, à cela près que $A(x)$ est définie et continue sur C ($|A(x)| \neq 0$; $x \in C$); Birkhoff suppose même que $A(x)$ est analytique sur C , sauf en un nombre fini de points, où elle possède une infinité de dérivées. Nous avons montré d'ailleurs [4] que, pour résoudre le problème, il suffit de supposer

que $A(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz sur la courbe C , supposée sans singularité.

Soit alors $\tau(x)$ une fonction holomorphe sur C et telle que sur C $|\tau(x)| = 1$; $\tau(x)$ représente un anneau $\varrho^{-1} \leq |\tau| \leq \varrho$ ($\varrho > 1$) sur une couronne du plan (x). Birkhoff forme les équations matricielles

$$(1) \quad \begin{cases} F^+(x) - F^-(x) = \tau^p(x) A(x) G^+(x), \\ G^-(x) - G^+(x) = \tau^{-p} A^{-1}(x) F^-(x) - e \end{cases} \quad (x \in C)$$

aux inconnues $F^+(x)$, $F^-(x)$, $G^+(x)$, $G^-(x)$ (les indices supérieurs $+$ et $-$ signifiant, ici et dans ce numéro, l'holomorphie à l'intérieur et à l'extérieur de C ; p désigne un entier > 0 et e la matrice-unité); et il observe que ces équations entraînent sur C

$$F^+(x) = \tau^p(x) A(x) [G^-(x) + e]$$

c'est-à-dire une équation de la forme (2,1). Or les propriétés d'intégrales de Cauchy des types

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^p(z) a(z) g^+(z)}{z - x} dz,$$

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^{-p}(z) a(z) g^-(z)}{z - x} dz,$$

où $a(z)$ est lipschitzienne sur C et l'emploi de la méthode des approximations successives permettent de résoudre les équations (1). La convergence des approximations résulte des inégalités suivantes: si $f^-(x)$ [resp. $f^+(x)$] désignent les intégrales (2) [resp. (3)] pour x extérieur [resp. intérieur] à C , on a

$$\max_{x \in C} |f^-(x)| < \eta \max_{x \in C} |g^+(x)|,$$

$$\max_{x \in C} |f^+(x)| < \eta \max_{x \in C} |g^-(x)|,$$

η pouvant être choisi arbitrairement petit, pourvu que p soit pris assez grand (indépendamment de $g^+(x)$ ou de $g^-(x)$).

De même, les propriétés de l'intégrale de Cauchy permettent de trouver deux fonctions $\theta^+(x)$ et $\theta^-(x)$ telles que sur C

$$\theta^+(x) - \theta^-(x) = \log \tau(x) - \log (x - c),$$

(c , intérieur à C), d'où

$$e^{-p\theta^+(x)}\mathbf{F}^+(x) = \mathbf{A}(x) (x - c)^p e^{-p\theta^-(x)}[\mathbf{G}^-(x) + e]$$

On a ainsi une première solution

$$\mathbf{F}_I^+(x) = e^{-p\theta^+(x)}\mathbf{F}^+(x), \quad \mathbf{F}_I^-(x) = (x - c)^p e^{-p\theta^-(x)}[\mathbf{G}^-(x) + e]$$

de l'équation (2,1); et en multipliant à droite $\mathbf{F}_I^+(x)$ et $\mathbf{F}_I^-(x)$ par une matrice rationnelle convenablement choisie, $\mathbf{R}(x)$, on peut former une nouvelle solution $\mathbf{F}_I^+(x)\mathbf{R}(x)$, $\mathbf{F}_I^-(x)\mathbf{R}(x)$ normalisée, c'est-à-dire de déterminants non nuls, ni sur C , ni en dehors de C .

4. - Pour déduire de la résolution du problème de Riemann-Hilbert celle du problème primitif P de Riemann, G. D. Birkhoff introduit un problème de Riemann-Hilbert généralisé P_N que nous énoncerons ainsi:

Etant donnés dans le plan complexe $(x)N$ courbes fermées analytiques, sans points doubles et extérieures les unes aux autres, soient $C_1, \dots, C_N$, il s'agit de trouver N matrices carrées d'ordre m , $\mathbf{F}_1^+(x), \dots, \mathbf{F}_N^+(x)$ holomorphes respectivement dans les régions $R_1, \dots, R_N$ intérieures respectivement à $C_1, \dots, C_N$, et une matrice carrée d'ordre m , $\mathbf{F}^-(x)$, uniforme et holomorphe dans la région R extérieure aux C (et pouvant être méromorphe en $x = \infty$) telles que

$$\mathbf{F}_i^+(x) = \mathbf{a}_i(x)\mathbf{F}^-(x) \quad (x \in C_i; \quad i = 1, \dots, N)$$

$\mathbf{a}_i(x)$ étant une matrice carrée d'ordre m définie sur C et y satisfaisant à une condition de Lipschitz.

G. D. Birkhoff résout P en résolvant successivement un problème P_1 et un problème P_N ([2], p. 537). Nous ne rappel-

lerons pas les détails de la méthode de Birkhoff; mais nous voudrions proposer ici une nouvelle méthode de résolution du problème généralisé P_N .

5. — Pour résoudre P_N , Birkhoff procède par récurrence en ramenant la résolution de P_{k+1} (aux contours $C_1, \dots, C_{k+1}$) à celle de P_k (aux contours $C_1, \dots, C_k$) suivie de la résolution d'un problème P_1 . La méthode exige donc qu'on ait fait toutes les approximations nécessitées par P_k avant de commencer celles du problème P_1 . Il n'y aurait d'ailleurs pas d'obstacle à instituer un algorithme qui effectuerait simultanément toutes les approximations, mais les déterminants des matrices approchées qui s'introduiraient pourraient s'annuler sur certains contours, et leur normalisation compliquerait la démonstration de convergence. Aussi, semble-t-il préférable d'appliquer la méthode suivante qui, au lieu d'être une itération de la méthode employée pour P_1 , en constitue une généralisation.

6. — Supposons qu'on ait déterminé pour chaque courbe C_i la fonction $\tau_i(x)$ qui joue pour C_i le même rôle que $\tau(x)$ pour C (§ 3); soient $a_i(x)$ une fonction définie et lipschitzienne sur C_i et $g_i^+(z)$ une fonction holomorphe dans R_i et continue sur C_i ($i = 1, 2, \dots, N$). L'intégrale.

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \frac{\tau_i^p(z) a_i(z) g_i^+(z)}{z - x} dz$$

définit deux fonctions analytiques distinctes $f_i^+(x)$ ou $f_i^-(x)$, selon que x est respectivement intérieur à R_i , ou à la réunion de R^- et des R_j ($j \neq i$). Posons, dans R^- :

$$(2) \quad F^-(x) = \sum_{j=1}^N f_j^-(x)$$

et dans R_i

$$(3) \quad F_i^+(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N f_j^-(x) + f_i^+(x);$$

les fonctions $f_j^-(x)$ ($j \neq i$) étant holomorphes le long de C_i (sans point commun avec les autres C_j), on a, pour $x \in C_i$:

$$(4) \quad F_i^+(x) - F^-(x) = \tau_i^p(x) a_i(x) g_i^+(x).$$

La fonction $F^-(x)$, holomorphe dans R^- et nulle à l'infini comme les $f_i^-(x)$, est continue sur les C_i ; d'ailleurs, comme plus haut (§ 3), on pourra choisir l'entier positif p assez grand pour que l'on ait quel que soit i ($= 1, \dots, N$)

$$\max_{x \in C_i} |f_i^-(x)| \leq \eta \max_{x \in C_i} |g_i^+(x)|$$

η étant un nombre > 0 arbitrairement petit. On aura ainsi, quel que soit $j = (1, \dots, N)$

$$(5) \quad \begin{aligned} \max_{x \in C_j} |F^-(x)| &\leq \sum_{i=1}^N \max_{x \in C_j} |f_i^-(x)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \max_{x \in C_i} |f_i^-(x)| \leq \eta \sum_{i=1}^N \max_{x \in C_i} |g_i^+(x)|. \end{aligned}$$

D'autre part, si $b_i(z)$ est lipschitzienne sur C_i et si $f^-(z)$ est holomorphe dans R^- et continue sur les C_j , l'intégrale

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \frac{\tau_i^{-p}(z) b_i(z) f^-(z)}{z - x} dz$$

représente, suivant que x appartient à R_i ou à la réunion de R^- et des R_j ($j \neq i$), deux fonctions analytiques distinctes, $g_i^+(x)$ et $g_i^-(x)$; et l'on a sur C_i :

$$(7) \quad g_i^+(x) - g_i^-(x) = \tau_i^{-p}(x) b_i(x) f^-(x),$$

avec

$$(8) \quad \max_{x \in C_i} |g_i^+(x)| \leq \eta \max_{x \in C_i} |f^-(x)| \leq \eta \max_{x \in R^-} |f^-(x)|, \quad (i = 1, \dots, N)$$

le dernier maximum étant atteint sur l'un des C_j ($j \neq i$ ou $j = i$). Quitte à augmenter l'entier p figurant dans (1) et (6) on pourra toujours supposer qu'il assure la validité des inégalités (5) et (8).

7. - Envisageons maintenant les équations matricielles

$$(I) \begin{cases} f_i^+(x) - f^-(x) = \tau_i^p(x) a_i(x) g_i^+(x), \\ g^-(x) - g_i^+(x) = \tau_i^{-p}(x) a_i^{-1}(x) f^-(x) - e \end{cases} \quad (x \in C_i; i = 1, \dots, N)$$

que nous chercherons à vérifier par des matrices $f_i^+(x)$, $g_i^+(x)$, holomorphes dans R_i , continues sur C_i , et $f^-(x)$, $g^-(x)$, holomorphes dans R^- , continues sur les C_j .

Nous ferons les approximations successives, entièrement analogues à celles de G. D. Birkhoff pour P_1 :

$$f_{i0}^+ - f_0^- = 0, \quad g_0^- - g_{i0}^+ = -e,$$

que nous résoudrons par

$$f_{i0}^+(x) = 0 = f_0^-(x), \quad g_0^-(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_{i0}^+(x) = e$$

puis, pour $x \in C_i$ et $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} f_{i1}^-(x) - f_1^-(x) &= \tau_i^p(x) a_i(x) g_{i0}^+(x), \\ g_1^-(x) - g_{i1}^+(x) &= \tau_i^{-p}(x) a_i^{-1}(x) f_1^-(x) - e \\ &\dots \dots \dots \\ f_{in}^+(x) - f_n^-(x) &= \tau_i^p(x) a_i(x) g_{i,n-1}^+(x) \\ g_n^-(x) - g_{in}^+(x) &= \tau_i^{-p}(x) a_i^{-1}(x) f_n^-(x) - e, \end{aligned}$$

Posons, pour $x \in C_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ et $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} f_{in}^+(x) - f_{i,n-1}^+(x) = p_{in}^+(x), & f_n^-(x) - f_{n-1}^-(x) = p_n^-(x), \\ g_{in}^+(x) - g_{i,n-1}^+(x) = q_{in}^+(x), & g_n^-(x) - g_{n-1}^-(x) = q_n^-(x). \end{cases}$$

Il viendra, comme antérieurement, avec $q_{i0}^+(x) = g_{i0}^+(x) = e$:

$$\begin{cases} p_{in}^+(x) - p_n^-(x) = \tau_i^p(x) a_i(x) q_{i,n-1}^+(x), \\ q_n^-(x) - q_{in}^+(x) = \tau_i^{-p}(x) a_i^{-1}(x) p_n^-(x). \end{cases}$$

Or, ces équations matricielles équivalent aux équations

$$(2) \quad p_{in,jh}^+(x) - p_{n,jh}^-(x) = \tau_i^p(x) \sum_{k=1}^m a_{i,jk}(x) q_{i,n-1,kh}^+(x),$$

$$(3) \quad q_{n,jh}^-(x) - q_{in,jh}^+(x) = \tau_i^{-p}(x) \sum_{k=1}^m b_{i,jk}(x) p_{n,kh}^-(x),$$

($j, h = 1, \dots, m$)

les $b_{i,jk}(x)$ étant les éléments de la matrice $\mathbf{a}_i^{-1}(x)$. Pour résoudre ces équations, on résoudra par application de (6,1), (6,2), (6,3), (6,4) chacune des équations

$$p_{in,jh}^{k+}(x) - p_{n,jh}^{k-}(x) = \tau_i^p(x) a_{i,jk}(x) q_{i,n-1,kh}^+(x), \quad (x \in C_i)$$

et l'on prendra

$$p_{in,jh}^{k+}(x) = \sum_{k=1}^m p_{in,jh}^{k+}(x), \quad p_{n,jh}^{k-}(x) = \sum_{k=1}^m p_{n,jh}^{k-}(x),$$

et l'on appliquerait de même (6,6) et (6,7) à la résolution des équations (3).

La convergence des approximations s'établira au moyen de (6,5) et (6,8). Posons

$$|p_{\mu,jh}^-(x)| \leq p_{\mu} \quad (x \in R^-) \quad \text{et} \quad |q_{i\mu,jh}^+(x)| \leq q_{\mu} \quad (x \in R_i);$$

on peut d'ailleurs prendre $q_0 = 1$. Il résulte alors de (6,5) et (6,8) appliquées aux équations (2) et (3) que l'on pourra écrire, avec $m\eta = \lambda$:

$$p_1 < N\lambda, \quad q_1 < N\lambda^2, \quad p_2 < N^2\lambda^3, \quad q_2 < N^2\lambda^4, \\ \dots, \quad p_n < N^n\lambda^{2n-1}, \quad q_n < N^n\lambda^{2n}.$$

Si donc p a été choisi assez grand pour que

$$Nm^2\eta^2 < 1,$$

les suites $\{f_n^-(x)\}$ et $\{g_{in}^+(x)\}$ et, par conséquent, les suites $\{f_{in}^-(x)\}$ et $\{g_n^-(x)\}$ convergeront absolument et uniformément

sur les C_i , ainsi que dans R^- et R_i^+ respectivement, vers une solution des équations (1).

8. — On déduit des équations (7,1)

$$(1) \quad f_i^+(x) = \tau_i^p(x) a_i(x) [g^-(x) + e] \quad (x \in C_i);$$

or, comme au § 3, on peut trouver deux fonctions $\theta_i^+(x)$, $\theta_i^-(x)$, holomorphes respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de C_i et telles que sur C_i

$$\theta_i^+(x) - \theta_i^-(x) = \log \tau_i(x) - \log (x - c_i)$$

(c_i intérieur à C_i). Posons

$$\sum_{i=1}^N \theta_i^-(x) = \theta^-(x),$$

$$\theta_i^+(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N [\theta_j^-(x) - \log (x - c_j)] = \Theta_i^+(x);$$

on pourra écrire

$$\Theta_i^+(x) - \theta^-(x) = \log \tau_i(x) - \sum_{j=1}^N \log (x - c_j),$$

et d'après (1) on aura obtenu une solution des équations (4,1) avec

$$F_i^+(x) = e^{-p\Theta_i^+(x)} f_i^+(x), \quad F^-(x) = \prod_{j=1}^N (x - c_j)^p e^{-p\theta^-(x)} [g^-(x) + e],$$

solution qu'on normalisera ensuite comme l'a indiqué G. D. Birkhoff.

BIBLIOGRAFIA

- [1] « Monatsh. für Math. und Phys. » **19**, 1908, p. 205.
- [2] « Proceed. of the Amer. Acad. of Arts and Sc. » **49**, 1913, p. 521.
- [3] « Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. » (3), **43**, 1926, p. 177.
- [4] « Compos. Math. » **8**, 1951, p. 185.

Unilateral Constraints in Mechanics of Continua.

Abstract. — *The mechanical behavior of an elastic, perfectly locking solid is governed by a scalar function of the strain components, which is called the locking function. In a state of strain for which this function is negative, the solid responds in a purely elastic manner to all sufficiently small changes of stress. When the locking function vanishes, however, there exist changes of stress that will not produce any change of strain. This phenomenon is called locking. Finally, states of strain that render the locking function positive cannot be attained. The present paper develops the theory of elastic, perfectly locking solids in greater generality than has been done so far.*

I. — INTRODUCTION.

For a perfectly elastic solid under uniaxial stress, Hooke's law stipulates strict proportionality between the axial stress and strain. Most solids begin to deviate from this idealized behavior far below their ultimate strength. With reference to the initial linearly elastic behavior, we shall characterize such a deviation as *hardening* if the stress increment required to produce a given increment of strain rises above the value observed in the linearly elastic range. The opposite behavior will be called *softening*.

Plastic *yielding* under constant stress represents an extreme case of softening. For the corresponding extreme case of hardening, this author introduced the term *locking* [1], [2]. The

present paper develops the theory of elastic, perfectly locking materials in greater generality than seems to have been done so far (see, for instance, Ref. [3], [4], [5]).

2. — NOTATIONS AND CONSTITUTIVE LAW.

In the following, lower case Latin subscripts take the range 1, 2, 3, and the summation convention applies to repeated subscripts. The coordinates x_i are rectangular and Cartesian, and differentiation with respect to x_i is indicated by the operator ∂_i .

As in the linear theory of elasticity, the displacement vector u_i and its vector gradient $\partial_i v_j$ will be treated as infinitesimal, so that the strain tensor is given by

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

The stress tensor will be denoted by σ_{ij} , and the vector of the body force per unit of volume by F_i .

The mechanical behavior of an elastic, perfectly locking solid is governed by a function $g(\varepsilon_{ij})$ of the strain components, which will be called *locking function*. Locking can only occur in a state of strain for which this function vanishes. In states of strain for which the locking function is negative the solid responds in a purely elastic manner to any sufficiently small change of stress, and no state of strain can be attained for which this function would be positive.

In the following, we shall regard the locking function g as a function of the *nine* strain components $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{33}$ that involves symmetric components (e. g., ε_{12} and ε_{21}) in a symmetric manner. The hypersurface $g = 0$ in the nine-dimensional strain space with the rectangular Cartesian coordinates ε_{ij} will be called the *locking locus*; we shall assume it to be convex and to have continuously turning tangent plane.

For brevity, the expressions «locking strain» and «non-locking strain» will be used to indicate states of strain that

are respectively represented by points on the locking locus or inside it. If ε'_{ij} is a locking strain and ε''_{ij} a locking or non-locking strain, and the derivative $\partial g/\partial \varepsilon_{ij}$ evaluated for $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}$ is denoted by $(\partial g/\partial \varepsilon_{ij})'$, it follows from the convexity of the locking locus that

$$(2.2) \quad (\partial g/\partial \varepsilon_{ij})' (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}) \geq 0.$$

The stress σ_{ij} associated with a locking strain will be written as the sum of the *elastic stress* π_{ij} and the *locking stress* ϱ_{ij} , and the following assumptions will be made concerning these symmetric tensors.

The components of the elastic stress are linear forms in the strain components. The precise relations between the components of strain and elastic stress are not important for our discussion, but we shall repeatedly use the facts that they are one-to-one and that the doubly contracted product of an arbitrary strain tensor ε_{ij} and the corresponding elastic stress tensor π_{ij} is nonnegative and vanishes only if $\varepsilon_{ij} = 0$. Thus,

$$(2.3) \quad \pi_{ij}\varepsilon_{ij} > 0 \quad \text{unless} \quad \varepsilon_{ij} = 0.$$

From the point of view of analytical mechanics, the body force F_i is an *external* force, while the elastic stress π_{ij} has the nature of an *internal* force. In the formula expressing the principle of virtual work, the terms involving external and internal forces appear with opposite signs. For example, for the typical volume element dV body force and elastic stress contribute the terms $(F_i \delta u_i - \pi_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV$. In this sense, the locking stress ϱ_{ij} must be classified as the *internal reaction* to the *unilateral constraint* $g(\varepsilon_{ij}) \leq 0$ because it contributes the term $-\varrho_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$.

Assuming this unilateral constraint to be workless, and keeping in mind that ϱ_{ij} represents an internal rather than an external reaction, we have

$$(2.4) \quad -\varrho_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \geq 0,$$

where $\delta\epsilon_{ij}$ is an arbitrary virtual change of strain, and the strict inequality applies only to a change from a locking to a nonlocking state of strain.

In a nonlocking state of strain, $\delta\epsilon_{ij}$ is unrestricted and (2.4) furnishes $\varrho_{ij} = 0$. In a locking state of strain, however, $\delta\epsilon_{ij}$ must satisfy

$$(2.5) \quad \delta g \equiv \frac{\partial g}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} \leq 0.$$

For virtual changes of strain with $\delta g = 0$, it follows from (2.4) that ϱ_{ij} is proportional to $\partial g / \partial \epsilon_{ij}$. Consideration of strain changes with $\delta g < 0$ then shows that the factor of proportionality is nonnegative. Thus,

$$(2.6) \quad \varrho_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \epsilon_{ij}} \text{ with } \lambda \geq 0.$$

Note that the locking stress for a given locking state of strain is only determined to within a nonnegative factor.

In view of (2.6), the convexity condition (2.2) may be written in the form

$$(2.7) \quad \varrho'_{ij}(\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}) \geq 0,$$

where the locking stress ϱ'_{ij} is associated with the locking strain ϵ'_{ij} . Since ϱ'_{ij} may be defined as zero for nonlocking strains, (2.7) is valid for arbitrary attainable strains ϵ'_i and ϵ''_{ij} .

The inequality (2.7) may be used to show that the total stress σ_{ij} uniquely specifies the elastic and locking stresses. Indeed, let us assume that σ_{ij} admits the decompositions

$$(2.8) \quad \sigma_{ij} = \pi'_{ij} + \varrho'_{ij} = \pi''_{ij} + \varrho''_{ij}.$$

Collecting the elastic stresses on one side and the locking stresses on the other side of the equation and multiplying both sides by $\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}$, we have

$$(2.9) \quad (\pi'_{ij} - \pi''_{ij})(\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}) = -(\varrho'_{ij} - \varrho''_{ij})(\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}).$$

By (2.3), the left-hand side of (2.9) is nonnegative and vanishes only when $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$. By (2.7), however, the right-hand side of (2.9) is nonpositive. If a contradiction is to be avoided, both sides must vanish, that is, $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$ and hence $\pi'_{ij} = \pi''_{ij}$. It follows then from (2.8) that $\varrho'_{ij} = \varrho''_{ij}$.

3. — TYPICAL BOUNDARY VALUE PROBLEM.

The following fairly general boundary value problem will be considered, which concerns the simply connected volume V with the regular surface S . At a typical element dS of this surface, some components T_α of the surface traction and the complementary components U_β of the surface displacement are prescribed, the joint range of α and β being 1, 2, 3. (For example, in the classical torsion problem of Saint Venant, all three components of the surface tractions are required to vanish on the cylindrical surface of the twisted bar; at the plane end sections, the normal component of the surface traction is to vanish, while the tangential components of the surface displacement are to represent a relative rotation of the two end sections, which corresponds to the given angle of twist).

If T'_i, T''_i are two systems of surface tractions, and U'_i, U''_i two systems of surface displacements satisfying boundary conditions of this type, we have

$$(3.1) \quad (T'_i - T''_i) (U'_i - U''_i) = 0.$$

Indeed, for any value of i either the first or the second factor in (3.1) vanishes.

From the data on the surface, the displacement field u_{ij} and the stress field σ_{ij} are to be determined throughout V subject to the following conditions. The stress field must satisfy the equations of equilibrium

$$(3.2) \quad \partial_i \sigma_{ij} + F_j = 0 \quad \text{in } V$$

and

$$(3.3) \quad n_i \sigma_{ij} = T_\alpha \quad \text{on } S,$$

where n_i is the unit vector along the exterior normal of S and the subscript α assumes only the values corresponding to the prescribed components of the surface traction. The displacement field must satisfy the boundary condition

$$(3.4) \quad u_\beta = U_\beta \quad \text{on } S,$$

where the subscript β assumes only the values corresponding to the prescribed displacement components. Finally, the stresses σ_{ij} must be related to the strains derived from the displacements u_i by means of a constitutive law of the form discussed in Section 2.

A continuous stress field σ_{ij} with piecewise continuous first derivatives that is defined throughout V will be called *statically admissible* with reference to the considered boundary value problem if it satisfies (3.2) and (3.3). Similarly, a continuous displacement field with piecewise continuous first derivatives that is defined throughout V will be called *kinematically admissible* if (3.4) is satisfied and the corresponding strains do nowhere cause the locking function to assume positive values.

Let $\sigma_{ij}^{(1)}$ be a statically admissible stress field and $T_j^{(1)} = n_i \sigma_{ij}^{(1)}$ the corresponding surface tractions. Furthermore, let $u_i^{(2)}$ be a kinematically admissible displacement field and $\epsilon_{ij}^{(2)}$ and $U_j^{(2)}$ the corresponding strains and surface displacements. The principle of virtual work applied to the statical quantities $\sigma_{ij}^{(1)}$, $T_j^{(1)}$ on one hand and the kinematical quantities $u_i^{(2)}$, $\epsilon_{ij}^{(2)}$, $U_j^{(2)}$ on the other hand furnishes the relation

$$(3.5) \quad \int T_j^{(1)} U_j^{(2)} dS + \int F_i u_i^{(2)} dV - \int \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} dV = 0,$$

which will be frequently used in the following discussion.

To investigate to what extent the solution of our boundary value problem is unique, let us assume that there exist two solutions σ'_{ij} , u'_i , ϵ'_{ij} and σ''_{ij} , u''_i , ϵ''_{ij} . Since these correspond to the same body force, and since the stress field $\sigma'_i - \sigma''_{ij}$ is statically admissible and the displacement field $u'_i - u''_i$

is kinematically admissible, the relation (3.5) applied to these fields furnishes

$$(3.6) \quad \int (T'_j - T''_j) (U'_j - U''_j) dS - \int (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) (\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}) dV = 0.$$

The first integral in this relation vanishes by (3.1), and we have

$$(3.7) \quad \int (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) (\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}) dV = 0.$$

Decomposing the stresses in the integrand I of (3.7) into elastic and locking stresses, we see that

$$(3.8) \quad I = (\pi'_{ij} - \pi''_{ij}) (\epsilon'_i - \epsilon''_{ij}) + (\rho'_{ij} - \rho''_{ij}) (\epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}) \geq 0$$

because both terms of the sum in (3.8) are nonnegative by (2.3) and (2.7). For (3.7) to be satisfied, the integrand I must vanish identically, and this implies $\epsilon'_i = \epsilon''_{ij}$ by (2.3). The solution of our boundary value problem is therefore unique as far as the strain field and hence the elastic stress field are concerned. The displacement field is only determined to within a rigid body displacement, but the boundary conditions on displacements will in many cases preclude the superposition of a rigid body displacement. Where locking occurs, the locking stresses and hence the total stresses are not necessarily unique.

4. — MINIMUM PRINCIPLE FOR DISPLACEMENTS.

Considering a kinematically admissible displacement field u_j^0 , denote the corresponding surface displacements, strains, and elastic stresses by U_j^0 , ϵ_{ij}^0 , and π_{ij}^0 . The expression

$$(4.1) \quad H^0 = \int \frac{1}{2} \pi_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 dV - \int T_\alpha U_\alpha^0 dS - \int F_j u_j^0 dV,$$

in which, for each surface element, the subscript α ranges through the values corresponding to prescribed components of the surface traction, is then a functional of the displacement field u_j^0 .

Denoting the displacement fields of two solutions by u_j and u'_j , we now prove that the corresponding values H and H' of the functional (4.1) are equal and smaller than H^0 unless the strain field ε_{ij}^0 is identical with the unique strain field of the solutions.

Indeed, the solutions u_j and u'_j have identical strain fields $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}$ and hence identical fields of elastic stress $\pi_{ij} = \pi'_{ij}$. Accordingly,

$$(4.2) \quad H - H' = - \int T_a (U_a - U'_a) dS - \int F_j (u_j - u'_j) dV.$$

We may increase the first integrand in (4.2) by the vanishing term $T_\beta (U_\beta - U_\beta)$, where the subscript β ranges through the values corresponding to prescribed components of the surface displacement. Thus,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} H - H' &= - \int T_j (U_j - U'_j) dS - \int F_j (u_j - u'_j) dV = - \\ &= - \int \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij}) dV = 0, \end{aligned}$$

where (3.5) has been used in the transition from the first to the second line. In a similar manner, one finds

$$(4.4) \quad H^0 - H = \int A dV,$$

where

$$(4.5) \quad 2A = \pi_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 - \pi_{ij} \varepsilon_{ij} - 2\sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}).$$

Setting $\sigma_{ij} = \pi_{ij} + \varrho_{ij}$ in (4.5) and using Betti's reciprocity theorem according to which $\pi_{ij}^0 \varepsilon_{ij} = \pi_{ij} \varepsilon_{ij}^0$, one obtains

$$(4.6) \quad 2A = (\pi_{ij}^0 - \pi_{ij}) (\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}) + 2\varrho_{ij} (\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}) \geq 0$$

because the two terms of the sum on the right-hand side of (4.6) are nonnegative by (2.3) and (2.7). It follows from (4.4) and (4.6) that $H^0 \geq H$. For H^0 and H to be equal, the non-

negative integrand in (4.4) must vanish identically and this implies $\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}$ by (2.3). We thus have the following *minimum principle*: Among all kinematically admissible displacement fields, the displacement fields of the solutions to our boundary value problem minimize the functional (4.1).

5. — MAXIMUM PRINCIPLE FOR STRESSES.

Considering a statically admissible stress field σ_{ij}^* , let T_i^* be the corresponding surface traction, π_{ij}^* and ϱ_{ij}^* the elastic and locking stresses, which are uniquely specified by σ_{ij}^* [see the discussion following (2.8)], and ϵ_{ij}^* the associated strains, which follow uniquely from π_{ij}^* . The expression

$$(5.1) \quad K^* = \int T_\beta^* U_\beta dS - \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij}^* + \varrho_{ij}^*) \epsilon_{ij}^* dV,$$

in which, for each surface element, the subscript β ranges through the values corresponding to the prescribed components of the surface displacement, is then a functional of the stress field σ_{ij}^* . Denoting the stress fields of two solutions by σ_{ij} and σ'_{ij} , and employing the same steps as in Section 4, one readily proves that the corresponding values K and K' of the functional (5.1) are equal and greater than K^* unless the strain field ϵ_{ij}^* is identical with the unique strain field of the solutions. We thus have the following *maximum principle*: Of all statically admissible stress fields, the stress fields of the solutions to our boundary value problem maximize the functional (5.1).

6. — GENERALIZATIONS.

The preceding results for elastic, perfectly locking solids can be generalized in several ways.

Firstly, instead of constitutive laws involving the stresses and unilaterally restricted strains we may consider laws involving the stresses and unilaterally restricted strain rates.

Non-Newtonian liquids of this kind were first mentioned by this author [6] and comprehensively treated by Varley [7] and Ziegler [8].

Secondly, the general duality between statical and kinematical variables in mechanics of continua suggests the consideration of constitutive laws that involve the strains or the strain rates and unilaterally restricted stresses. Although a unilateral restriction on stresses may be interpreted as a *yield limit*, the dual of the elastic, perfectly locking solid is not the elastic, perfectly plastic solid usually considered in the mathematical theory of plasticity (see, for instance, Ref. [9]) but a generalization of the solid on which Hencky [10] based his theory of plasticity.

International Business Machines Corporation
Zurich Research Laboratory
Rüschlikon-Zürich, Switzerland

REFERENCES

- [1] PRAGER W., *On limiting states of deformation*, University of Maryland, «Lecture Series», N. 32 (1956).
- [2] PRAGER W., *On ideal locking materials*, «Transactions of the Society of Rheology», 1, 169 (1957).
- [3] PRAGER W., *Elastic solids of limited compressibility*, «Proceedings of the 9th International Congress of Applied Mechanics», Vol. 5, Brussels, 205 (1958).
- [4] PHILLIPS A. and Y. YILDIZ, *The thick-walled hollow sphere of an elastic-locking material*, «Oesterreichisches Ingenieur-Archiv», 16, 313 (1962).
- [5] FLÜGGE W. and H. V. SATHYANARAYANA, *A contribution to the theory of isotropic locking*, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, «Technical Report Sudaer», N. 152 (1963).
- [6] PRAGER W., *Non-analytic relations in rheology*, Contribution to Colloque International de Rhéologie, «Editions du Centre National de la Recherche Scientifique», Paris (1960).
- [7] VARLEY E., *Flow of dilatant fluids*, «Quart. Appl. Math.», 19, 331 (1962).

- [8] ZIEGLER H., *Some limiting cases of non-Newtonian fluids*, Contribution to « Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Volume », The Macmillan Co., New York (1963), see also *idem*, *Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics*, Contribution to « Progress in Solid Mechanics », Vol. 4, edited by I. N. Sneddon and R. Hill, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1963).
 - [9] PRAGER W. and P. G. HODGE, Jr., *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley & Sons, New York (1951).
 - [10] HENCKY G., *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*, « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik », 4, 323 (1924).
-

Variational methods in aeronautics.

Summary. — *A general survey is presented of the problems of optimum trajectories of aircraft, missiles, satellites, and spaceships. Since these questions fall under the mathematical scheme covered by the Mayer formulation of the calculus of variations, the Mayer problem is reviewed first: it considers the set of m derivated functions $y_\alpha(x)$ and n nonderivated functions $z_\beta(x)$ which satisfy r differential constraints and no more than $2m + 1$ boundary conditions; among these functions, one has to find that particular set which extremizes (i.e., minimizes or maximizes) the difference ΔG between the end values of an arbitrarily specified function $G(x, y_\alpha)$. In connection with the Mayer problem, the Euler-Lagrange equations, the corner conditions, the transversality condition, the Legendre-Clebsch condition, and the Weierstrass condition are discussed.*

Then, a vehicle flying in a great-circle plane is considered subject to aerodynamic forces, gravitational forces, and thrust; it is recognized that the most general trajectory problem involves three degrees of freedom respectively associated with the programming of the lift, the thrust direction, and the thrust modulus. The two-point boundary value problem arising from the simultaneous integration of the set of constraining equations and Euler equations is discussed. Concerning the thrust direction, it is shown that the

(*) Director of Astrodynamics and Flight Mechanics, Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington, USA; also, Visiting Professor of Aeronautics and Astronautics, University of Washington, Seattle, Washington, USA.

tangent of the angle between the thrust and the velocity equals the derivative of the drag with respect to the lift. Regarding the thrust modulus, it is shown that the optimum program includes maximum thrust subarcs, variable thrust subarcs, and zero thrust subarcs; the number of these subarcs and their sequence are governed by the properties of the switching function.

Next, constrained trajectories are considered, that is, trajectories in which the vehicle is required not only to satisfy the customary kinematic and dynamic relationships but also any two additional constraints involving all of the variables of the problem. These constrained trajectories are characterized by one degree of freedom whose physical nature depends on the constraints imposed. In connection with these constrained trajectories, several subclasses are considered within the broad frame of three main problems: quasi-steady flight over a flat Earth, nonsteady flight over a flat Earth, and nonsteady flight over a spherical Earth. A wide variety of analytical solutions pertaining to the flight paths of gliders, turbojet, turbofan, or ramjet aircraft, and rocket-powered vehicles is presented.

I. INTRODUCTION.

The object of this lecture, which has been prepared at the invitation of the Academy of Sciences of Turin, is to survey the calculus of variations as applied to aerospace engineering. At the onset, several problem areas exist where variational techniques are employed, for instance: applied aerodynamics through the study of the optimum shapes of aircraft and missile components [Ref. 1], elasticity through the study of the structures having minimum weight [Ref. 2], and flight mechanics through the study of the optimum trajectories of aircraft, missiles, satellites, and spaceships [Ref. 3]. Because of time and space considerations, only flight mechanics applications are reviewed here.

Flight mechanics is that branch of the aerospace sciences whose scope at large is to determine the performance of a vehicle which moves under the effect of the gravitational forces, the aerodynamic forces, and the propulsive forces (the term

vehicle is employed here in a general sense and, depending on the particular case, may denote aircraft, missile, satellite, or spaceship). A particular, but important, aspect of this study is the analysis of the conditions under which the performance is optimum.

In the years preceding World War II, it was commonly believed that flight mechanics had reached a conclusive and rather stagnant stage of development. The progress achieved in the last twenty years has disproved this belief. In fact, the advent of jet propulsion systems and the associated increase in flight velocities have generated a wealth of problems in applied mathematics which cannot be handled by conventional methods of performance analysis. Among these problems, those concerned with the optimum flight conditions are discussed here.

Physically speaking, there are two main classes of optimum problems in flight mechanics: problems of quasi-steady flight and problems of nonsteady flight, that is, problems where the inertia terms can be neglected in the dynamical equations and problems where they cannot. Regardless of the steadiness or nonsteadiness of the motion, the determination of optimum flight programs requires the study of functional forms which depend on the flight path integrally, rather than locally. Thus, the calculus of variations is of primary importance in flight mechanics, even though there are certain simplified problems of quasi-steady flight which are amenable to treatment by the simpler methods of the ordinary theory of maxima and minima. However, since all of the optimum problems of flight mechanics can be handled by means of the calculus of variations, it follows that the most economical and general theory of the optimum flight paths is a variational theory. The results relative to quasi-steady flight can be obtained as a particular case of those pertinent to nonsteady flight by letting the acceleration terms appearing in the equations of motion decrease, tending to zero in the limit.

2. HISTORICAL SKETCH.

Although the systematic application of the calculus of variations to flight mechanics is quite recent, it is of interest to note that Goddard [Ref. 4] recognized the calculus of variations as an important tool in the performance analysis of rockets in a paper published nearly half a century ago. Hamel [Ref. 5], on the other hand, formulated the problem of the optimum burning program for vertical flight nearly one-third of a century ago.

Despite these sporadic attempts, the need for an entirely new approach to the problem of optimum aircraft performance was realized by the Germans only during World War II; in particular, Lippisch [Ref. 6] investigated the most economic climb of a rocket-powered aircraft and shed considerable light on a new class of problems of the mechanics of flight. In the years following World War II, the optimum climbing program of turbojet aircraft attracted considerable interest and was investigated in a highly simplified form by Lush [Ref. 7] and Miele [Ref. 8] with techniques other than the indirect methods of the calculus of variations.

A short time later, a rigorous variational formulation of the problem of the optimum flight paths became possible due to the work of Cicala [Refs. 9 and 10], Garfinkel [Ref. 11], and Hestenes [Ref. 12] on the formulations of Bolza, Mayer, and Lagrange. Subsequent developments were due to Breakwell [Ref. 13], Fried [Ref. 14], Lawden [Refs. 15 and 16], Leitmann [Refs. 17 and 18], and Miele [Refs. 19 and 20]. It must be noted that, while the indirect methods of the calculus of variations are of fundamental importance in solving extremal problems, several other optimization techniques have been employed in recent years, more specifically, Bellman's theory of dynamic programming [Ref. 21], Kelley's gradient theory [Ref. 22], and Miele's theory of linear integrals using Green's theorem [Refs. 23 through 25]. It must also be noted that, for the limiting case of flight with negligible acceleration, the calculus of variations and the ordinary theory of maxima and minima yield identical

results [Ref. 26]; consequently, a greatly simplified approach to the problem of the optimum quasi-steady flight paths is possible, if the method of the Lagrange multipliers is employed [Ref. 27].

Since the literature on the subject is quite extensive, it is not possible in this short space to present a detailed account of every problem which has been treated so far. Consequently, we shall proceed along the following lines. First, the most general problem of the calculus of variations in one independent variable is reviewed, and the main necessary conditions for the extremum are presented. Then, the problem of the optimum flight path is formulated for both unconstrained and constrained trajectories in connection with a vehicle subject to gravitational forces, aerodynamic forces, and thrust. Finally, several particular examples are demonstrated. For simplicity, the nonsteady flight over a spherical Earth is considered; the results relative to the nonsteady flight over a flat Earth and those pertaining to the quasi-steady flight over a flat Earth are a specialization of the general theory.

3. THE PROBLEM OF MAYER.

The most general problems of the calculus of variations in one independent variable are the problems of Lagrange, Mayer, and Bolza. The first deals with the extremization of a line integral, the second with the extremization of a function of the end coordinates, and the third with the extremization of the sum of a line integral and a function of the end coordinates. These three problems are theoretically equivalent in that any one of them can be transformed into another by a change of coordinates. For the purposes of this paper, we shall refer to the problem of Mayer only and shall formulate it as follows: «Consider the class of derivated functions (functions whose derivatives are present in the problem)

$$(1) \qquad \qquad \qquad y_a = y_a(x) \qquad \qquad a = 1, \dots, m$$

and nonderivated functions (functions whose derivatives are not present in the problem)

$$(2) \quad z_\beta = z_\beta(x) \quad \beta = 1, \dots, n$$

satisfying the constraints

$$(3) \quad \varphi_\gamma(x, y_a, \dot{y}_a, z_\beta) = 0 \quad \gamma = 1, \dots, r$$

which involve

$$(4) \quad f = m + n - r$$

degrees of freedom. Assuming that these functions must be consistent with the separated end conditions

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_\mu(x_i, y_{ai}) &= 0 & \mu &= 1, \dots, p \\ \psi_\nu(x_f, y_{af}) &= 0 & \nu &= 1, \dots, q \end{aligned}$$

find that special set such that the functional form

$$(6) \quad I = [G(x, y_a)]_i^f$$

is minimized». In the above relations, the dot sign denotes a derivative with respect to the independent variable, the subscript i stands for initial point, and the subscript f stands for final point. Furthermore, the numbers m, n, p, q, r satisfy the inequalities

$$(7) \quad \begin{aligned} m + n - r &> 0 \\ p &\leq m + 1, \quad q \leq m + 1, \quad p + q \leq 2m + 1. \end{aligned}$$

3.1. *Euler-Lagrange Equations.* — The problem formulated above can be treated in a simple and elegant manner if the variable Lagrange multipliers

$$(8) \quad \lambda_\gamma = \lambda_\gamma(x) \quad \gamma = 1, \dots, r$$

are introduced and if the following expression, called the *fundamental function*, is formed:

$$(9) \quad F = \sum_{\gamma=1}^r \lambda_\gamma \varphi_\gamma.$$

It is known that the extremal arc, the special curve extremizing the functional I , must satisfy not only Eqs. (3) but also the Euler-Lagrange equations [Ref. 28]

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_a} &= 0 & a = 1, \dots, m \\ \frac{\partial F}{\partial z_\beta} &= 0 & \beta = 1, \dots, n \end{aligned}$$

The differential system composed of the constraining equations (3) and the Euler-Lagrange equations (10) includes $m + n + r$ equations and unknowns; consequently, its solution yields the $m + n$ dependent variables and the r Lagrange multipliers simultaneously.

3.2. *First Integral.* — A mathematical consequence of the Euler-Lagrange equations is the differential relationship

$$(11) \quad \frac{d}{dx} \left(\sum_{a=1}^m \dot{y}_a \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Consequently, for problems where the fundamental function is formally independent of x , the following first integral is valid:

$$(12) \quad \sum_{a=1}^m \dot{y}_a \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} = C$$

where C is a constant.

3.3. *Corner Conditions.* — There are many variational problems which are characterized by discontinuous solutions, that is, solutions in which one or more of the derivatives $\dot{y}_a$ experiences jumps at a finite number of points. These points are called *corner points*; the entire solution is still called the *extremal arc*, while each component portion is called a *subarc*. When discontinuities occur, a mathematical criterion is needed to

join the different portions of the extremal arc. This criterion is supplied by the Erdmann-Weierstrass corner condition

$$(13) \quad \Delta \left(\sum_{a=1}^m \dot{y}_a \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) \delta x - \sum_{a=1}^m \Delta \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) \delta y_a = 0$$

which must be satisfied by the differences $\Delta (\dots)$ between quantities evaluated after the corner and before the corner for every system of variations imposed on the location of the corner point. Hence, if no restriction is imposed on the location of a corner point, the corner conditions require that

$$(14) \quad \Delta \left(\sum_{a=1}^m \dot{y}_a \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) = 0, \quad \Delta \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) = 0 \quad a = 1, \dots, m$$

If the fundamental function is formally independent of x , Eq. (13) reduces to

$$(15) \quad \Delta C \delta x - \sum_{a=1}^m \Delta \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) \delta y_a = 0$$

and Eqs. (14) to

$$(16) \quad \Delta C = 0, \quad \Delta \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) = 0 \quad a = 1, \dots, m$$

which means that the integration constant of the first integral (12) has the same value for all the subarcs composing the extremal arc.

3.4. Transversality Condition. — The system composed of the constraining equations and the Euler-Lagrange equations is subjected to $2m + 2$ boundary conditions. Of these, $p + q$ are supplied by Eqs. (5) and $2m + 2 - p - q$ by the transversality condition

$$(17) \quad \left[\delta G - \left(\sum_{a=1}^m \dot{y}_a \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \right) \delta x + \sum_{a=1}^m \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \delta y_a \right]_i^f = 0$$

which is to be satisfied identically for all systems of variations consistent with Eqs. (5). For the particular case in which the fundamental function is formally independent of x , the transversality condition reduces to

$$(18) \quad \left[\delta G - C \delta x + \sum_{a=1}^m \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \delta y_a \right]_i^f = 0$$

3.5. *Legendre-Clebsch and Weierstrass Conditions.* — After an extremal arc has been determined, it is necessary to investigate whether the functional I attains a maximum or a minimum value. In this connection, the necessary conditions due to Weierstrass and to Legendre and Clebsch are of considerable assistance. Even though both of these conditions have a local nature, they differ insofar as the former refers to a system of *strong variations* while the latter pertains to a system of *weak variations*. Hence, the Legendre-Clebsch condition is a consequence of the Weierstrass condition.

Analytically, the Weierstrass condition states that the functional I attains a minimum if the following inequality is satisfied at all points of the extremal arc:

$$(19) \quad \Delta F - \sum_{i=1}^{m+n} \frac{\partial F}{\partial u_i} \Delta u_i \geq 0$$

for all systems of strong variations Δu_i consistent with the constraining equations (3) with the understanding that

$$(20) \quad \begin{aligned} u_1 &= \dot{y}_1, & u_2 &= \dot{y}_2, \dots, & u_m &= \dot{y}_m \\ u_{m+1} &= z_1, & u_{m+2} &= z_2, \dots, & u_{m+n} &= z_n. \end{aligned}$$

Because of Eqs. (3), (9), and (10-2), the Weierstrass condition is equivalent to

$$(21) \quad \sum_{a=1}^m \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_a} \Delta \dot{y}_a \leq 0.$$

On the other hand, if a system of weak variations δu_i is considered and a Maclaurin expansion is employed, Ineq. (19)

reduces to the Legendre-Clebsch condition

$$(22) \quad \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j \geq 0$$

which must be satisfied for all systems of weak variations consistent with the constraining equations (3), that is, with

$$(23) \quad \sum_{i=1}^{m+n} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial u_i} \delta u_i = 0 \quad \gamma = 1, \dots, r$$

It must be noted that the Weierstrass condition and the Legendre-Clebsch condition are only *necessary conditions* for a relative minimum and that the development of the complete sufficiency proof requires that the Jacobi-Mayer condition be satisfied. It must also be noted that, for most problems having engineering interest, the Legendre-Clebsch condition yields the same information as the Weierstrass condition (1); furthermore, the investigation of the Jacobi-Mayer condition is not easily accomplished. Consequently, the practicing engineer is often forced to rely on the Legendre-Clebsch condition alone in order to distinguish a relative minimum from a relative maximum. Even though the results obtained in this way are by no means complete, physical reasoning in combination with the numerical investigation of neighboring paths allows one in most cases to be certain that the solution obtained by the combined use of the Euler-Lagrange equations and the Legendre-Clebsch condition yields a relative minimum for the functional under consideration.

4. EQUATIONS OF MOTION.

Consider a vehicle moving in a great circle plane over a spherical Earth subject to the following forces (Fig. 1): the drag D , the lift L , the thrust T , and the weight W which is the product of the instantaneous mass m and the local acceler-

(1) This statement is not necessarily true for every problem.

ation of gravity g . Assume that the drag function has the form

$$(24) \quad D = D(h, V, L)$$

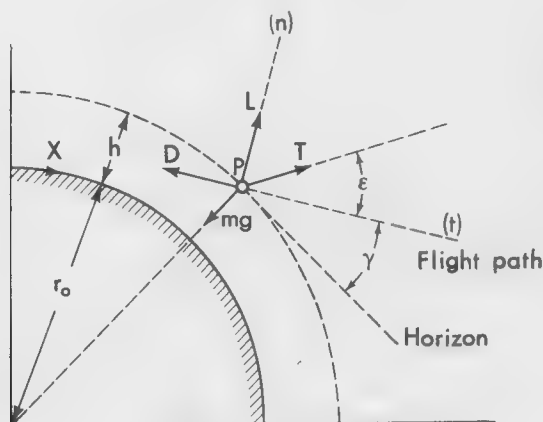


Fig. 1.

Coordinate system.

where h is the altitude and V the velocity and that the thrust and the mass flow of fuel are functions of the following type:

$$(25) \quad T = T(h, V, \pi), \quad \beta = \beta(h, V, \pi)$$

where π denotes a variable controlling the engine performance and is called the engine control parameter, the thrust control parameter, or the power setting. As an example, π can be identified with the rotor speed N or the corrected rotor speed N_c of a turbojet or a turbofan engine, with the fuel-to-air ratio μ or the corrected fuel-to-air ratio μ_c of a ramjet engine, and with the combustion chamber pressure p_c or the propellant mass flow β of a rocket engine [Ref. 29]. Also, assume that the variation of the acceleration of gravity with the altitude h is represented by the inverse square law

$$(26) \quad g = g_o \left(\frac{r_o}{r_o + h} \right)^2$$

in which r_0 denotes the radius of the Earth and g_0 the acceleration of gravity at sea level.

With these considerations in mind, the equations governing the nonsteady flight in a great circle plane are given by

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_1 \equiv \dot{X} - \frac{r_0}{r_0 + h} V \cos \gamma = 0 \\ \varphi_2 \equiv \dot{h} - V \sin \gamma = 0 \\ \varphi_3 \equiv \dot{V} + g \sin \gamma + \frac{D - T \cos \varepsilon}{m} = 0 \\ \varphi_4 \equiv \dot{\gamma} + \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r_0 + h} \right) \cos \gamma - \frac{L + T \sin \varepsilon}{mV} \mp 2\omega \cos \varphi = 0 \\ \varphi_5 \equiv \dot{m} + \beta = 0 \end{cases}$$

where X denotes a curvilinear coordinate measured on the surface of the Earth, γ the inclination of the trajectory with respect to the local horizon, ε the inclination of the thrust with respect to the velocity, ω the angular velocity of the Earth with respect to the Fixed Stars, φ the smaller of the two angles which the polar axis forms with the perpendicular to the plane of motion, and the dot sign a derivative with respect to time. The sign preceding the Coriolis acceleration term in Eq. (27-4) is negative for motion in the same sense as that of the Earth's rotation and positive for motion in the opposite sense.

Notice that the thrust modulus cannot have any arbitrary value in flight but only those values which are bounded by a lower limit and an upper limit. If it is assumed that the lower limit is ideally zero, Eqs. (27) must be completed by the two-sided inequality constraint

$$(28) \quad 0 \leq T(h, V, \pi) \leq T_m(h, V)$$

which can be replaced by the equality constraint

$$(29) \quad \varphi_6 \equiv T(T_m - T) - \alpha^2 = 0$$

where a denotes a *real variable*. By this device, a modification of one originally due to Valentine [Ref. 30], a variational problem involving an inequality constraint is reduced to the same mathematical model which is useful for solving problems where all the constraints are represented by equalities.

5. UNCONSTRAINED OPTIMUM TRAJECTORIES.

The system composed of the equations (27) and (29) involves one independent variable, the time t , and the nine dependent variables $X, h, V, \gamma, m, L, \varepsilon, \pi, a$. This system has three degrees of freedom, as is logical in view of the possibility of controlling the time history of the lift, the thrust direction, and the thrust modulus [Ref. 29]. Consequently, some optimum requirement can be imposed on the flight trajectory. Among the nine dependent variables, five of them (X, h, V, γ, m) are derivated and four (L, ε, π, a) are nonderivated. Consequently, meaningful end conditions have the form

$$(30) \quad \begin{aligned} \psi_\mu(t_i, X_i, h_i, V_i, \gamma_i, m_i) &= 0 & \mu &= 1, \dots, p \\ \psi_\nu(t_f, X_f, h_f, V_f, \gamma_f, m_f) &= 0 & \nu &= 1, \dots, q \end{aligned}$$

where $p \leq 6$, $q \leq 6$, and $p + q \leq 11$. After the functional to be extremized is written as

$$(31) \quad I = [G(t, X, h, V, \gamma, m)]_i^f$$

the variational problem of the Mayer type is formulated as follows: «In the class of functions $X(t), h(t), V(t), \gamma(t), m(t), L(t), \varepsilon(t), \pi(t), a(t)$ which are consistent with the equations (27) and (29) and with the end conditions (30), find that special set such that the functional (31) is minimized». This general problem involves as a particular case almost every extremal problem of the mechanics of flight. Thus, if the quantity to be minimized is the time, we set $G = t$. On the other hand, if the propellant consumption is to be minimized, we set $G = -m$. Finally, if the range is to be maximized, we set $G = -X$.

5.1. *Euler-Lagrange Equations.* — By proceeding in the same manner as in Section 3, the variable Lagrange multipliers

$$(32) \quad \lambda_\gamma = \lambda_\gamma(t) \quad \gamma = 1, \dots, 6$$

are introduced and the fundamental function is written as follows:

$$(33) \quad F = \lambda_1 \left(\dot{X} - \frac{r_0}{r_0 + h} V \cos \gamma \right) + \lambda_2 (\dot{h} - V \sin \gamma) + \\ + \lambda_3 \left(\dot{V} + g \sin \gamma + \frac{D - T \cos \varepsilon}{m} \right) + \\ + \lambda_4 \left[\dot{\gamma} + \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r_0 + h} \right) \cos \gamma - \frac{L + T \sin \varepsilon}{mV} \mp 2 \omega \cos \varphi \right] + \\ + \lambda_5 (\dot{m} + \beta) + \lambda_6 (TT_m - T^2 - \alpha^2).$$

Hence, the optimum path is described by the equations of motion plus the following set of Euler-Lagrange equations:

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= \lambda_1 \frac{r_0}{(r_0 + h)^2} V \cos \gamma + \\ &+ \lambda_3 \left[\frac{dg}{dh} \sin \gamma + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial D}{\partial h} - \frac{\partial T}{\partial h} \cos \varepsilon \right) \right] + \\ &+ \lambda_4 \left[\frac{dg}{dh} \frac{\cos \gamma}{V} + \frac{V \cos \gamma}{(r_0 + h)^2} - \frac{\sin \varepsilon}{mV} \frac{\partial T}{\partial h} \right] + \\ &+ \lambda_5 \frac{\partial \beta}{\partial h} + \lambda_6 \frac{\partial}{\partial h} (TT_m - T^2) \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1 \frac{r_0}{r_0 + h} \cos \gamma - \lambda_2 \sin \gamma + \frac{\lambda_3}{m} \left(\frac{\partial D}{\partial V} - \frac{\partial T}{\partial V} \cos \varepsilon \right) + \\ &+ \lambda_4 \left[-\left(\frac{g}{V^2} + \frac{1}{r_0 + h} \right) \cos \gamma + \frac{L}{mV^2} - \frac{\sin \varepsilon}{m} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{T}{V} \right) \right] + \\ &+ \lambda_5 \frac{\partial \beta}{\partial V} + \lambda_6 \frac{\partial}{\partial V} (TT_m - T^2) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_4 &= V \left(\lambda_1 \frac{r_0}{r_0 + h} \sin \gamma - \lambda_2 \cos \gamma \right) + \lambda_3 g \cos \gamma + \\
 &\quad + \lambda_4 \sin \gamma \left(\frac{V}{r_0 + h} - \frac{g}{V} \right) \\
 \dot{\lambda}_5 &= \frac{\lambda_3}{m^2} (T \cos \varepsilon - D) + \frac{\lambda_4}{m^2 V} (L + T \sin \varepsilon) \\
 \dot{0} &= \frac{1}{m} \left(\lambda_3 \frac{\partial D}{\partial L} - \frac{\lambda_4}{V} \right) \\
 0 &= \frac{T}{m} \left(\lambda_3 \sin \varepsilon - \frac{\lambda_4}{V} \cos \varepsilon \right) \\
 0 &= -\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial \pi} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) + \lambda_5 \frac{\partial \beta}{\partial \pi} + \lambda_6 \frac{\partial T}{\partial \pi} (T_m - 2T) \\
 0 &= -2\lambda_6 a .
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

The differential system composed of the constraining equations and the Euler-Lagrange equations includes 15 equations and 15 unknowns; consequently, its solution yields the 9 dependent variables and the 6 Lagrange multipliers simultaneously. Generally speaking, approximate methods of integration are needed, since analytical solutions are possible only in special cases. An additional complication arises from the fact that the variational problems of interest in aerospace engineering are always of the mixed boundary value type, that is, problems with conditions prescribed in part at the initial point and in part at the final point. Consequently, in the case where closed-form solutions cannot be obtained, trial-and-error techniques must be employed; they consist of guessing the missing initial conditions, integrating numerically the set of Euler-Lagrange equations and constraining equations, and then determining the difference between the resulting final conditions and the specified final conditions. Since these differences are in general not zero, the process must be repeated several times until these differences vanish, that is, until the specified final conditions are met;

in this connection, it is worth mentioning that analytical schemes have been developed [see, for instance, Ref. 31] in order to contain the number of iterations within reasonable limits ⁽²⁾. At any rate, while the integration process is far from being simple, some general conclusions concerning the programming of the thrust direction and the thrust modulus can be readily derived by inspection of the set of Euler-Lagrange equations.

5.1.1. *Thrust Direction Program.* — We observe that the Euler-Lagrange equations (34-6) and (34-7) are linear and homogeneous in the multipliers λ_3 and λ_4 . Consequently, nontrivial solutions exist providing

$$(35) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial L} & 1 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

that is, providing

$$(36) \quad \varepsilon = \arctan \left(\frac{\partial D}{\partial L} \right).$$

For a parabolic polar, the drag function has the form

$$(37) \quad D = \frac{1}{2} C_{D0} \rho S V^2 + \frac{2KL^2}{\rho S V^2}$$

⁽²⁾ An alternative possibility consists of abandoning the indirect methods considered here and employing direct procedures, for instance, those discussed in Refs. 22 and 32. These direct procedures, which have been developed primarily in order to circumvent the mixed boundary value difficulties, have many computational merits; however, they only yield numerical solutions valid for particular problems. On the other hand, the indirect methods enable one to obtain general results valid for entire classes of problems, providing analytical solutions can be found; furthermore, even in the case where such solutions cannot be found, the indirect methods often supply important qualitative information on the nature of the extremal path—information which cannot be obtained by any of the existing direct procedures.

where S is a reference area, $\rho = \rho(h)$ the air density, $C_{D0} = C_{D0}(M)$ the zero-lift drag coefficient, $K = K(M)$ the induced drag factor, $M = V/a$ the Mach number, and $a = a(h)$ the speed of sound. Hence, the optimum thrust direction is given by

$$(38) \quad \varepsilon = \arctan(2KC_L)$$

where $C_L = 2L/\rho SV^2$ denotes the lift coefficient. Since $K > 0$, the thrust must be inclined in the direction of the lift (Fig. 2);

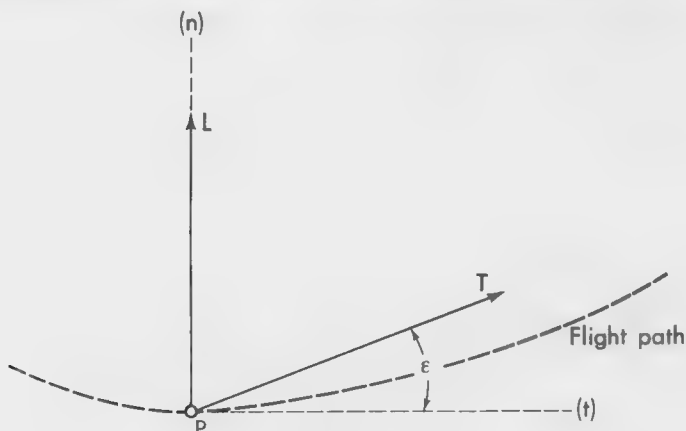


Fig. 2.

Optimum thrust direction.

this result is logical, since the creation of a normal component of the thrust reduces the amount of aerodynamic lift necessary to perform a certain maneuver and, therefore, reduce the induced drag associated with that lift. For small angles, Eq. (38) can be approximated by the relation

$$(39) \quad \varepsilon = 2KC_L$$

which, for the low subsonic regime, has a clear physical interpretation. Since the downwash angle associated with the lift coefficient C_L is approximately given by

$$(40) \quad \omega = KC_L$$

one concludes that

$$(41) \quad \varepsilon = 2\omega$$

meaning that the optimum inclination of the thrust with respect to the velocity is twice the downwash angle associated with the flight condition under consideration.

5.1.2. *Thrust Modulus Program.* — We observe that the Euler-Lagrange equation (34-9) admits the solutions

$$(42) \quad \alpha = 0 \quad \text{or} \quad \lambda_6 = 0$$

that is, the solutions

$$(43) \quad T = T_m \quad \text{or} \quad T = 0 \quad \text{or} \quad \lambda_6 = 0.$$

Therefore, the optimum thrust program includes maximum-thrust subarcs, coasting subarcs, and variable-thrust subarcs. The total number of these subarcs and their sequence depends on the boundary conditions of the problem.

5.2. *First Integral.* — Owing to the fact that the fundamental function is formally independent of the time, the Euler-Lagrange equations admit the first integral

$$(44) \quad \begin{aligned} & V \left(\lambda_1 \frac{r_0}{r_0 + h} \cos \gamma + \lambda_2 \sin \gamma \right) + \\ & + \lambda_3 \left(\frac{T \cos \varepsilon - D}{m} - g \sin \gamma \right) + \\ & + \lambda_4 \left[\left(\frac{V}{r_0 + h} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma + \frac{L + T \sin \varepsilon}{mV} \pm 2\omega \cos \varphi \right] - \lambda_5 \beta = C \end{aligned}$$

where C is a constant.

5.3. *Corner Conditions.* — If no restriction is imposed on the location of a corner point, the corner conditions (16) are rewritten in the form

$$(45) \quad \Delta C = 0, \quad \Delta \lambda_1 = \Delta \lambda_2 = \Delta \lambda_3 = \Delta \lambda_4 = \Delta \lambda_5 = 0.$$

Therefore, the Lagrange multipliers λ_1 through λ_5 must be continuous at a junction point while this is not necessarily true for the multiplier λ_6 . Furthermore, the integration constant C has the same value for all of the subarcs composing the extremal arc. Since all the derivated variables are continuous, the first integral (44) requires that

$$(46) \quad \Delta \left[\lambda_3 \frac{T \cos \varepsilon - D}{m} + \lambda_4 \frac{L + T \sin \varepsilon}{mV} - \lambda_5 \beta \right] = 0$$

at every corner point.

5.3.1. *Lift Program.* — Since the Euler-Lagrange equations must be satisfied both before and after the corner point, a discontinuity in the lift requires that the simultaneous conditions

$$(47) \quad \lambda_3 \Delta D - \frac{\lambda_4}{V} \Delta L = 0, \quad \lambda_3 \Delta \left(\frac{\partial D}{\partial L} \right) = 0$$

be satisfied. If the parabolic drag polar (37) is considered, one concludes that a discontinuity in the lift program is possible only at a point where the multipliers λ_3 and λ_4 vanish simultaneously.

5.3.2. *Thrust Direction Program.* — By an analogous reasoning, we see that a discontinuity in the thrust direction requires that the simultaneous conditions

$$(48) \quad \lambda_3 \Delta \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \Delta \sin \varepsilon = 0, \quad \lambda_3 \Delta \sin \varepsilon - \frac{\lambda_4}{V} \Delta \cos \varepsilon = 0$$

be satisfied. Since the determinant of the coefficients of the multipliers cannot vanish, we conclude that a discontinuity in the thrust direction program is possible only at a point where the multipliers λ_3 and λ_4 vanish simultaneously.

5.3.3. *Thrust Modulus Program.* — A discontinuity in the thrust modulus may occur providing that

$$(49) \quad \Delta \left[\frac{\lambda_3 T}{m} \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4 T}{mV} \sin \varepsilon - \lambda_5 \beta \right] = 0.$$

Now, consider a rocket vehicle, assume that the thrust is a linear function of the propellant flow rate, and choose the propellant flow rate to be the power setting. In other words, assume that

$$(50) \quad T = V_E \pi, \quad \beta = \pi$$

where V_E is the equivalent exit velocity of the engine which is regarded to be constant. For this particular case, Eq. (49) can be rewritten in the form

$$(51) \quad \Delta \left[\beta \left(\frac{\lambda_3 V_E}{m} \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4 V_E}{m V} \sin \varepsilon - \lambda_5 \right) \right] = 0$$

so that a discontinuity in the mass flow rate, and hence in the thrust, is possible only if

$$(52) \quad \frac{V_E}{m} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) - \lambda_5 = 0$$

before and after the corner point.

5.4. *Transversality Condition.* — The system composed of the 6 constraining equations and the 9 Euler-Lagrange equations is subject to 12 boundary conditions. Of these, $p + q$ are supplied by Eqs. (30) and $12 - p - q$ by the transversality condition

$$(53) \quad [\delta G - C \delta t + \lambda_1 \delta X + \lambda_2 \delta h + \lambda_3 \delta V + \lambda_4 \delta \gamma + \lambda_5 \delta m]_t^f = 0$$

which is to be satisfied identically for the systems of variations consistent with Eqs. (30). In particular, if the G -function is such that $\partial G / \partial t = 0$ and if no time condition is imposed on the trajectory, the integration constant has the value $C = 0$.

5.5. *Legendre-Clebsch and Weierstrass Conditions.* — The application of the Weierstrass condition to the problem under consideration shows that the functional I attains a minimum if the following inequality is satisfied:

$$(54) \quad \Delta \left[\lambda_3 \frac{D - T \cos \varepsilon}{m} - \lambda_4 \frac{L + T \sin \varepsilon}{m V} + \lambda_5 \beta \right] \geq 0$$

for every system of strong variations ΔL , $\Delta \varepsilon$, $\Delta \pi$. After it is recalled that

$$(55) \quad \Delta [\lambda_6 (TT_m - T^2 - \alpha^2)] = 0$$

the Weierstrass condition can be rewritten in the form

$$(56) \quad \Delta \left[\lambda_3 \frac{D - T \cos \varepsilon}{m} - \lambda_4 \frac{L + T \sin \varepsilon}{mV} + \right. \\ \left. + \lambda_5 \beta + \lambda_6 (TT_m - T^2 - \alpha^2) \right] \geq 0$$

and must be satisfied for every system of strong variations ΔL , $\Delta \varepsilon$, $\Delta \pi$, $\Delta \alpha$ consistent with the sixth constraining equation. Upon expanding the left-hand side of this inequality into a Maclaurin series, and accounting for the Euler equations (34-6) through (34-9), we can derive the Legendre-Clebsch condition

$$(57) \quad \frac{\lambda_3}{m} \frac{\partial^2 D}{\partial L^2} (\delta L)^2 + \frac{T}{m} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) (\delta \varepsilon)^2 - 2\lambda_6 (\delta \alpha)^2 + \\ + \left[-\frac{1}{m} \frac{\partial^2 T}{\partial \pi^2} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) + \lambda_5 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \pi^2} + \right. \\ \left. + \lambda_6 \frac{\partial^2 T}{\partial \pi^2} (T_m - 2T) - 2\lambda_6 \left(\frac{\partial T}{\partial \pi} \right)^2 \right] (\delta \pi)^2 \geq 0$$

which must be satisfied for every system of weak variations δL , $\delta \varepsilon$, $\delta \pi$, $\delta \alpha$ consistent with the constraining equation (29), that is, consistent with

$$(58) \quad (T_m - 2T) \frac{\partial T}{\partial \pi} \delta \pi - 2\alpha \delta \alpha = 0.$$

Furthermore, upon combining Ineq. (57) with Eqs. (34-8) and (58) and eliminating the multiplier λ_6 and the variation $\delta \alpha$, one can rewrite the Legendre-Clebsch condition in the form

$$(59) \quad A(\delta L)^2 + B(\delta \varepsilon)^2 + C(\delta \pi)^2 \geq 0$$

where

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\lambda_3}{m} \frac{\partial^2 D}{\partial L^2} \\ B &= \frac{T}{m} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) \\ C &= -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 T}{\partial \pi^2} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) + \lambda_5 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \pi^2} + \\ &\quad + \left[\frac{\lambda_3}{m} \frac{\partial T}{\partial \pi} \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{mV} \frac{\partial T}{\partial \pi} \sin \varepsilon - \lambda_5 \frac{\partial \beta}{\partial \pi} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{\partial^2 T / \partial \pi^2}{\partial T / \partial \pi} + \frac{T_m^2}{2T(T_m - T)(2T - T_m)} \frac{\partial T}{\partial \pi} \right]. \end{aligned} \right.$$

Since the variations δL , $\delta \varepsilon$, $\delta \pi$ are independent, the Legendre-Clebsch condition is satisfied as long as

$$(61) \quad A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0.$$

5.5.1. *Lift Program.* — Owing to the fact that, for the parabolic drag polar (37),

$$(62) \quad \frac{\partial^2 D}{\partial L^2} = \frac{4K}{\rho S V^2} > 0$$

one sees that the lift program is optimum providing that

$$(63) \quad \lambda_3 \geq 0$$

5.5.2. *Thrust Direction Program.* — After observing that $T/m > 0$, we conclude that the thrust direction program is optimum providing that

$$(64) \quad \lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \geq 0.$$

5.5.3. *Thrust Modulus Program.* — For this aspect of the problem, the conclusions depend on the characteristics of the

engine. For a rocket engine described by the relationships (50), the thrust program is optimum providing that

$$(65) \quad \frac{V_E}{m} \left(\lambda_3 \cos \varepsilon + \frac{\lambda_4}{V} \sin \varepsilon \right) - \lambda_5 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

for the maximum-thrust subarc, the variable-thrust subarc, and the zero-thrust subarc, respectively. For this reason, the left-hand side of Ineq. (65) is called the *switching function*.

6. CONSTRAINED OPTIMUM TRAJECTORIES.

In the previous section, optimum trajectories were investigated under the assumption that, in addition to the kinematic and dynamic relationships, a two-sided inequality constraint relative to the thrust modulus must be satisfied. In this section, we consider the case where the flight path is subjected to not only the previous constraints but also two additional constraints having the form

$$(66) \quad \begin{aligned} A(X, h, V, \gamma, m, L, \varepsilon, \pi, \alpha) &= 0 \\ B(X, h, V, \gamma, m, L, \varepsilon, \pi, \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

As an example, if the power setting is given, the equations of motion must be completed by the additional constraint $\pi - \text{Const} = 0$. As another example, if the path is flown at constant altitude, the equations of motion must be completed by either of the relationships $h - \text{Const} = 0$ or $\gamma = 0$. As a third example, if the path is flown with a tangentially directed thrust, the further relationship $\varepsilon = 0$ must be accounted for.

When the additional constraints (66) are present, the number of degrees of freedom is reduced to one; consequently, the Euler-Lagrange equations are modified and, hence, the resulting optimum conditions are modified. While the associated optimum trajectories are less general than those considered in the previous section, they are nevertheless of considerable engineering interest.

For these constrained trajectories, one logical course of action consists of deriving the optimum flight conditions in general accounting for the previous additional constraints and then specializing the results for particular cases, that is, for particular forms of the functions A and B . In this connection, the right-hand side of the fundamental function (33) is to be modified by the term

$$(67) \quad \lambda_7 A + \lambda_8 B$$

where λ_7 and λ_8 denote variable Lagrange multipliers. Furthermore the right-hand sides of the Euler-Lagrange equations (34) are modified by the terms

$$(68) \quad \lambda_7 \frac{\partial A}{\partial w_i} + \lambda_8 \frac{\partial B}{\partial w_i} \quad i = 1, \dots, 9$$

where w_i denotes the generic dependent, derivated or nonderivated, variable. In addition, the first integral (44), the corner conditions (45) and (46), and the Weierstrass condition (54) remain unchanged. Finally, if A and B are linear in the unknown functions, the Legendre-Clebsch condition (57) remains unchanged and must be satisfied for every system of weak variations δL , $\delta \varepsilon$, $\delta \pi$, $\delta \alpha$ consistent with the constraining equation (58) as well as with the further constraining relationships

$$(69) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial L} \delta L + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial A}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta \alpha &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial L} \delta L + \frac{\partial B}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial B}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \delta \alpha &= 0. \end{aligned}$$

An alternate course of action consists of employing the additional constraints in order to eliminate two of the dependent variables from the equations of motion and then deriving the optimum flight conditions directly for the particular case under consideration. These two courses of action are equivalent. For particular forms of the constraints A and B , analytical results can be obtained and are summarized below.

6.1. *Quasi-Steady Flight over a Flat Earth.* — If a vehicle is moving in the dense portion of the atmosphere with a velocity which is small with respect to the satellite velocity and a negligible acceleration, the following simplifications can be employed:

$$(70) \quad \frac{h}{r_0} \ll 1, \quad \frac{V^2}{r_0 g_0} \ll 1, \quad \frac{2\omega V \cos \varphi}{g_0} \ll 1$$

$$\frac{\dot{V}}{g_0} \ll 1, \quad \frac{V\dot{\gamma}}{g_0} \ll 1.$$

Under these assumptions, several analytical solutions of interest for aircraft performance can be obtained. Omitting analytical details, some of the relevant results are summarized below.

6.1.1. *Maximum Range of a Glider.* — Consider the problem of maximizing the range of a glider for given terminal altitudes, the flight time being free. For this problem, the functional to be extremized and the left-hand sides of the additional constraints (66) are written in the form

$$(71) \quad G = -X, \quad A = T, \quad B = \beta.$$

Inspection of the set of Euler-Lagrange equations shows that the Lagrange multipliers can be eliminated so that the following explicit form is obtained for the optimizing condition:

$$(72) \quad \frac{\partial D}{\partial V} = 0.$$

Hence, the optimum flight program is achieved when the aerodynamic drag has a minimum with respect to the velocity for constant values of the altitude and the lift. For the parabolic drag polar (37) and small path inclinations, Eq. (72) yields the following relationship [Ref. 29]:

$$(73) \quad \frac{2mg_0}{k\rho S} = M^2 \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \sqrt{\frac{2 + (C_{D0})_M}{2 - (K)_M}}$$

which determines the instantaneous optimum Mach number versus the altitude and is plotted in Fig. 3 for a typical subsonic transport. In this equation, $p = p(h)$ is the local atmospheric pressure, k the ratio of the specific heats, and the subscript M

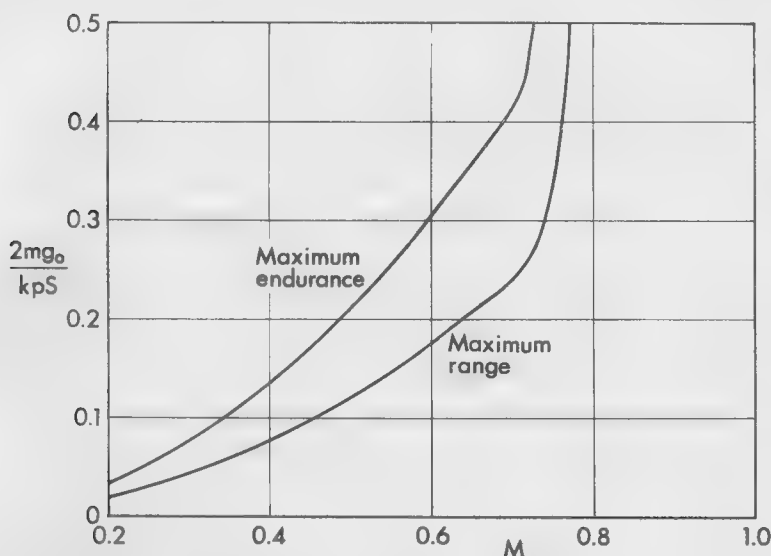


Fig. 3.

Typical glide performance for a subsonic transport.

denotes the logarithmic derivative of a quantity with respect to the Mach number, that is,

$$(74) \quad (\dots)_M = \frac{d \log (\dots)}{d \log M}.$$

For the low subsonic regime, this particular program requires that the dynamic pressure be kept constant, so that the angle of attack is constant.

6.1.2. *Maximum Endurance of a Glider.* — For the problem of maximizing the endurance of a glider for given terminal altitudes, the range being free, we set

$$(75) \quad G = -t, \quad A = T, \quad B = \beta.$$

If the changes in the drag due to changes in the lift are neglected and the Lagrange multipliers are eliminated, the optimizing condition becomes

$$(76) \quad \frac{\partial(DV)}{\partial V} = 0$$

and can be interpreted as follows: the optimum flight program is achieved when the power required to overcome the aerodynamic drag is a minimum with respect to the velocity for constant values of the altitude and the lift. For the parabolic drag polar (37), Eq. (76) can be rewritten in the form [Ref. 29]

$$(77) \quad \frac{2mg_0}{k\rho S} = M^2 \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \sqrt{\frac{3 + (C_{D0})_M}{1 - (K)_M}}$$

which is plotted in Fig. 3 for a typical subsonic transport. Once more, for the low subsonic regime, this program requires that the dynamic pressure be kept constant so that the angle of attack is constant.

6.1.3. *Maximum Range of a Turbojet or Ramjet Aircraft in Level Flight.* — Consider the problem of maximizing the range for a given fuel weight (the flight time being free) under the assumption that the trajectory is horizontal and the thrust is parallel to the velocity. After we set

$$(78) \quad G = -X, \quad A = \gamma, \quad B = \epsilon$$

laborious manipulations permit the elimination of the Lagrange multipliers so that the following result is obtained: the optimum path includes subarcs $T = T_m$ and variable-thrust subarcs along which

$$(79) \quad J \begin{pmatrix} \beta/V & T - D \\ V & \pi \end{pmatrix} = 0$$

where J is the Jacobian determinant of the functions β/V and $T - D$ calculated with respect to the velocity and the power

setting. For a turbojet, turbofan, or ramjet engine, the following coefficients of thrust and specific fuel consumption can be defined [Ref. 29]:

$$(80) \quad K_t = \frac{2T}{k p S}, \quad K_c = \frac{\beta a_*^2}{T a}$$

where k is the ratio of the specific heats, p is the local atmospheric pressure, a is the speed of sound, and the asterisk denotes quantities evaluated at the tropopause. These coefficients are functionally related to the Mach number and the power setting by the relationships

$$(81) \quad K_t = K_t(M, \pi), \quad K_c = K_c(M, \pi)$$

provided the power setting be identified with the corrected rotor speed N_c of a turbojet or turbofan engine and the corrected fuel-to-air ratio μ_c of a ramjet engine (3). With this understanding and by disregarding the dependence of K_c on the power setting, one can rewrite Eq. (79) in the form [Ref. 29]

$$(82) \quad \frac{2mg_0}{k p S} = M^2 \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \sqrt{\frac{1 + (C_{D0} K_c)_M}{3 - (K K_c)_M}}$$

which determines the optimum Mach number for every instantaneous weight and is plotted in Fig. 4 for a typical subsonic transport.

6.1.4. *Maximum Endurance of a Turbojet or Ramjet Aircraft in Level Flight.* — A modification of the previous problem consists of maximizing the flight time for a given fuel weight, the range being free. After setting

$$(83) \quad G = -t, \quad A = \gamma, \quad B = \varepsilon$$

(3) The corrected rotor speed is defined as $N_c = N a_* / N_m a$, where N is the actual rotor speed and N_m the maximum rotor speed. The corrected fuel-to-air ratio is defined as $\mu_c = \mu (a_* / a)^2$, where μ is the actual fuel-to-air ratio.

we conclude that the optimum path includes subarcs $T = T_m$ and variable-thrust subarcs along which

$$(84) \quad J \begin{pmatrix} \beta & T - D \\ V & \pi \end{pmatrix} = 0.$$

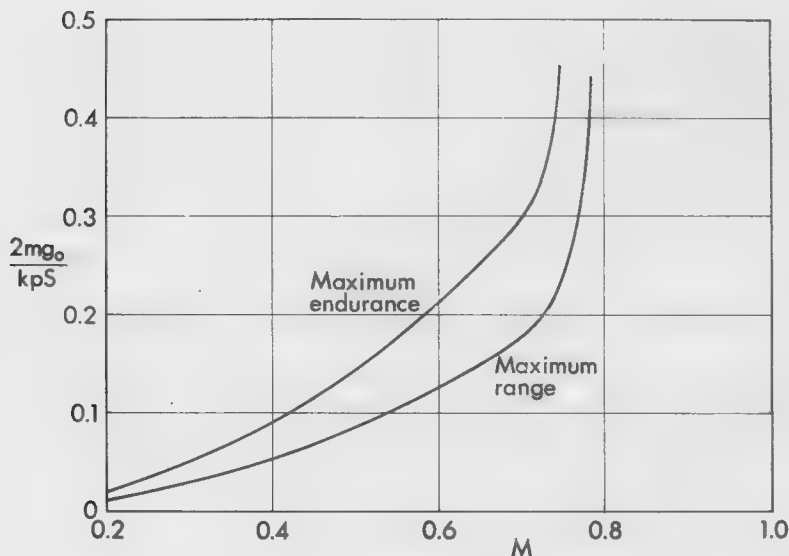


Fig. 4.

Typical level flight performance for a subsonic transport.

For a turbojet, turbofan, or ramjet engine, approximations identical with those of the previous section permit one to re-write Eq. (84) in the form [Ref. 29]

$$(85) \quad \frac{2mg_0}{kpS} = M^2 \sqrt{\frac{C_{Do}}{K}} \sqrt{\frac{2 + (C_{Do}K_c)M}{2 - (KK_c)M}}$$

which is plotted in Fig. 4 for a typical subsonic transport.

6.1.5. Maximum Range of a Turbojet or Ramjet Aircraft at Constant Power Setting. — Consider the problem of maximizing the range for a given fuel weight (the flight time being free) under the assumption that the trajectory is flown with

a constant power setting and the thrust parallel to the velocity.
After setting

$$(86) \quad G = -X, \quad A = \pi - \text{Const}, \quad B = \varepsilon$$

and assuming that

$$(87) \quad \gamma \ll 1, \quad mg_0 \gamma / D \ll 1$$

we see that the elimination of the Lagrange multipliers leads to the following explicit form for the optimizing condition:

$$(88) \quad J \begin{pmatrix} \beta/V & T-D \\ V & h \end{pmatrix} = 0.$$

If one considers a turbojet or turbofan aircraft operating in the isothermal stratosphere at constant rotor speed or a ramjet aircraft operating in the isothermal stratosphere at constant fuel-to-air ratio and if one uses the parabolic approximation (37), the following relationship can be obtained [Refs. 29 and 33]:

$$(89) \quad K_t = C_{D0} M^2 \frac{6 + (C_{D0}/KK_c^2 K_t^2)_M}{4 - (KK_c^2 K_t)_M}.$$

Since the instantaneous weight is not present in Eq. (89), one concludes that the optimum flight program admits the solution

$$(90) \quad M = \text{Const}.$$

In turn, inspection of the equations of motion shows that the constancy of the Mach number requires that

$$(91) \quad m/p = \text{Const}$$

everywhere along the flight path. Since the instantaneous weight decreases because of the consumption of fuel, the instantaneous free-stream pressure must decrease as the flight progresses. This is the same as stating that the flight altitude increases along the flight path. Hence, this particular technique is called the *cruise climb*. The altitude increase between the end points of a cruise climb depends only on the ratio $\zeta = (m_i -$

— m_f/m_i of the fuel mass to the initial mass and is plotted in Fig. 5. Furthermore, comparison of the constant power setting technique and the constant altitude technique shows that the range ratio depends on ζ only provided the cor-

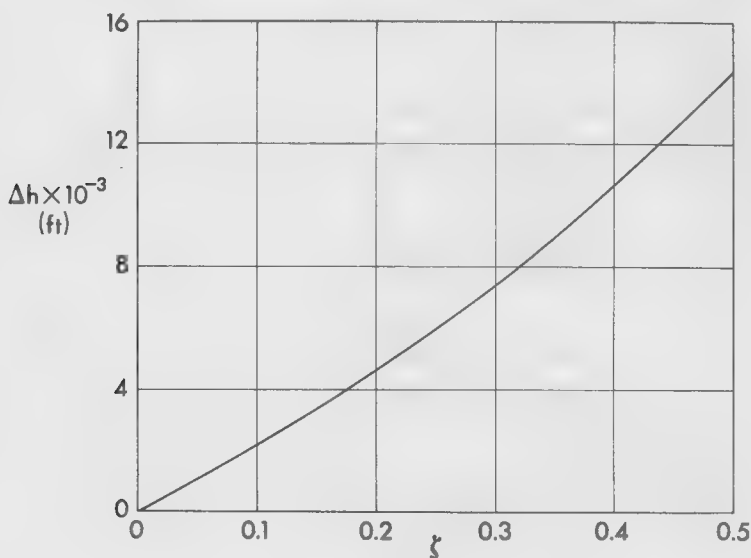


Fig. 5.

Altitude increase between the end points of a cruise climb.

rected rotor speed is such that compressibility effects on the drag polar can be neglected (Fig. 6).

6.1.6. Maximum Endurance of a Turbojet or Ramjet Aircraft at Constant Power Setting. — A modification of the previous problem consists of maximizing the endurance for a given fuel weight, the range being free. After setting

$$(92) \quad G = -t, \quad A = \pi - \text{Const}, \quad B = \varepsilon$$

we conclude that the optimum flight program is represented by the following condition:

$$(93) \quad J \begin{pmatrix} \beta & T - D \\ V & h \end{pmatrix} = 0.$$

If one considers a turbojet or turbofan aircraft operating in the isothermal stratosphere at a constant rotor speed or a ramjet aircraft operating in the isothermal stratosphere at a

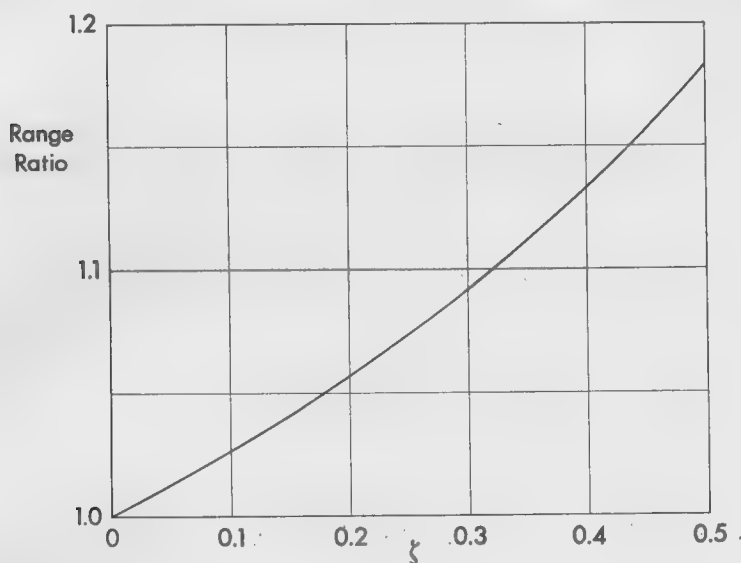


Fig. 6.

Ratio of the maximum range in constant power setting flight to the maximum range in constant altitude flight.

constant fuel-to-air ratio and if one uses the parabolic approximation (37), the relationship

$$(94) \quad K_t = C_{D0} M^2 \frac{4 + (C_{D0}/K K_c^2 K_t^2) M}{2 - (K K_c^2 K_t) M}$$

can be derived [Ref. 29]. Once more, therefore, the optimum flight program is flown with a constant Mach number and a constant value of the ratio m/p .

6.2. Nonsteady Flight over a Flat Earth. — If a vehicle is moving in the dense portion of the atmosphere with a velocity which is small with respect to the satellite velocity but with

a nonnegligible acceleration, the simplifications to be employed are as follows:

$$(95) \quad \frac{h}{r_0} \ll 1, \quad \frac{V^2}{g_0 r_0} \ll 1, \quad \frac{2\omega V \cos \varphi}{g_0} \ll 1.$$

Several analytical solutions are now presented.

6.2.1. *Maximum Range of a Glider.* — Consider the problem of maximizing the range of a glider for given terminal altitudes and given terminal velocities, the flight time being free. For this problem, the functional to be extremized and the additional constraints take the form (71). If one neglects the changes in the drag due to changes in the lift, the following result can be obtained: the optimum flight program includes subarcs $\cos \gamma = 0$ (dives or zooms) and variable path inclination subarcs along which the velocity-altitude relationship is represented by [Ref. 34]

$$(96) \quad \frac{\partial D}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial D}{\partial h} = 0.$$

If the energy height is defined as

$$(97) \quad h_e = h + \frac{V^2}{2g}$$

and the drag function is represented in the form $D = D(h_e, V, L)$, Eq. (96) can be rewritten as

$$(98) \quad \left[\frac{\partial D}{\partial V} \right]_{h_e, L} = 0$$

meaning that the optimum flight program is achieved when the aerodynamic drag has a minimum with respect to the velocity for constant values of the energy height and the lift. For the low subsonic regime, this particular flight program is flown with constant dynamic pressure and, hence, with constant angle of attack. Incidentally, for most types of boundary conditions, the results represented by Eq. (98) agree well with those derived

using the complete equations of motion in combination with the gradient method [Ref. 35].

6.2.2. *Maximum Endurance of a Glider.* — A modification of the previous problem consists of maximizing the flight time of a glider for given terminal altitudes and given terminal velocities, the range being free. For this problem, the functional to be extremized and the additional constraints take the form (75). Again, neglecting the changes in the drag due to changes in the lift, we see that the optimum flight program includes subarcs $\cos \gamma = 0$ (dives or zooms) and variable path inclination subarcs along which the velocity-altitude relationship is given by [Ref. 34]

$$(99) \quad \frac{\partial(DV)}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial(DV)}{\partial h} = 0$$

which is equivalent to

$$(100) \quad \left[\frac{\partial(DV)}{\partial V} \right]_{h_e, L} = 0.$$

Hence, the optimum flight program is achieved when the power required to overcome the aerodynamic drag is a minimum with respect to the velocity for constant values of the energy height and the lift. For the low subsonic regime, this particular program requires that the dynamic pressure be kept constant so that the angle of attack is constant.

6.2.3. *Brachistocronic Climb of a Turbojet Aircraft at Constant Power Setting.* — Consider the problem of minimizing the time necessary to transfer an aircraft from a given combination of speed and altitude to another combination of speed and altitude, the fuel consumed being free. Assuming that the power setting is given and the thrust is tangent to the flight path, we set

$$(101) \quad G = t, \quad A = \pi - \text{Const}, \quad B = \varepsilon.$$

Generally speaking, this problem can only be solved by means of numerical integration procedures [Ref. 36]. However, analytical solutions are possible if the variation in the weight of the aircraft due to the fuel consumption is negligible and the variations in the drag due to variations in the lift are negligible. Under these assumptions, the extremal arc can be shown to

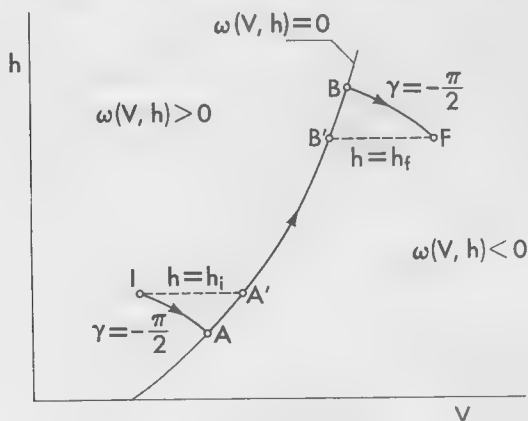


Fig. 7.

Optimum climb trajectory for constant power setting.

include subarcs $\cos \gamma = 0$ (dives or zooms) and variable path inclination subarcs along which [Ref. 34]

$$(102) \quad \frac{\partial(TV - DV)}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial(TV - DV)}{\partial h} = 0.$$

The way in which these different subarcs must be combined depends on the boundary conditions of the problem. In this connection, denote by $\omega(V, h)$ the left-hand side of Eq. (102), assume that the relationship $h(V)$ corresponding to $\omega(V, h) = 0$ is monotonic, and consider the particular case where $\omega_i > 0$ and $\omega_f < 0$. Under these conditions, the optimum trajectory consists of the following sequence of subarcs (Fig. 7)

$$(103) \quad \gamma = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \omega(V, h) = 0 \rightarrow \gamma = -\frac{\pi}{2}.$$

Should the aircraft be constrained to fly in the region of the velocity-altitude domain identified by the two-sided inequality constraint

$$(104) \quad h_i \leq h \leq h_f$$

the variational solution would become the following (Fig. 7):

$$(105) \quad \gamma = 0 \rightarrow \omega(V, h) = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

meaning that the vertical dives are to be replaced by horizontal accelerations. Incidentally, the mathematical solutions (103) and (105) are characterized by discontinuities in the path inclination at each corner point. Hence, in order to make these solutions usable for practical flight operations, some convenient fairings must be introduced between the different branches of the discontinuous extremal path. At any rate, for most types of boundary conditions, the velocity-altitude distribution predicted with this simplified approach agrees well with the velocity-altitude distribution derived using the complete equations of motion in combination with the gradient method (Ref. 37).

If Eq. (102) is transformed from the velocity-altitude domain into the velocity-energy height domain, the relationship

$$(106) \quad \left[\frac{\partial(TV - DV)}{\partial V} \right]_{h_e, L, \pi} = 0$$

is obtained. Defining the term $TV - DV$ as the *excess power*, one sees that the optimum flight program is achieved when the excess power is a maximum with respect to the velocity for constant values of the energy height, the lift, and the power setting. This result is the basis of the *energy-height method* commonly used by aircraft manufacturers. It consists of plotting the excess power versus the velocity for constant values of the energy height, the lift, and the power setting and in finding the locus of the points where the energy height is a maximum (Fig. 8).

Finally, an interesting modification of the previous problem arises when some limitations of a structural, aerodynamic,

or thermodynamic nature must be considered so that the usable portion of the velocity-altitude domain is reduced somewhat. Among these limitations, the following are prominent: the gust load limit, the aerodynamic heating limit, the sonic boom

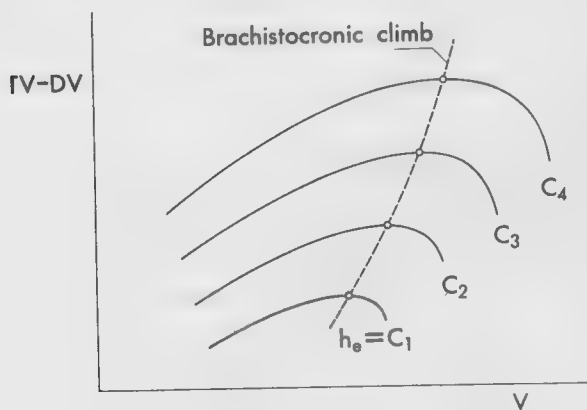


Fig. 8.

Illustration of the energy height method.

limit, the engine pressure limit, and the engine temperature limit. To introduce any of these limitations into the climb problem is equivalent to stating that the usable portion of the velocity-altitude domain is defined by the inequality

$$(107) \quad f(h, V, m, \pi) \geq 0$$

where the function f has a different analytical expression for each of these limits. Under these conditions, the solution of the brachistocronic climb problem is modified in the sense that the optimum path includes not only dives, zooms, and subarcs flown with maximum excess power but also subarcs which are flown along the boundary of the admissible domain and, therefore, are defined by

$$(108) \quad f(h, V, m, \pi) = 0.$$

6.2.4. *Most Economic Climb of a Turbojet Aircraft at Constant Power Setting.* — A modification of the previous problem

arises when the fuel consumed is to be minimized for given terminal altitudes and given terminal velocities, the flight time being free. Assuming that the power setting is given and the thrust is tangent to the flight path, one sets

$$(109) \quad G = -m, \quad A = \pi - \text{Const}, \quad B = \varepsilon.$$

Furthermore, retaining the hypotheses of the previous section, we see that the optimum flight program includes subarcs $\cos \gamma = 0$ (dives or zooms) and variable path inclination subarcs along which [Ref. 34]

$$(110) \quad \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{TV - DV}{\beta} \right) - \frac{V}{g} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{TV - DV}{\beta} \right) = 0$$

which is equivalent to

$$(111) \quad \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{TV - DV}{\beta} \right) \right]_{h_e, L, \pi} = 0.$$

In most cases having engineering interest, the most economic climb trajectory (111) is characterized by smaller velocities than the brachistocronic trajectory (106).

6.2.5. Maximum Range of a Rocket-Powered Aircraft in Level Flight. — Consider the problem of maximizing the range of a rocket-powered aircraft in level flight for given end velocities and given propellant mass, and assume that the thrust is tangent to the flight path; hence, retain the relationships (50) and (78). Under these conditions, the following result can be obtained: the optimum burning program includes subarcs $T = T_m$, subarcs $T = 0$, and variable-thrust subarcs along which the mass-velocity relationship is represented by [Ref. 38]

$$(112) \quad V \left(D + V_E \frac{\partial D}{\partial V} - mg_0 \frac{\partial D}{\partial L} \right) - V_E D = 0.$$

The way in which these different subarcs must be combined depends on the boundary conditions of the problem. In this connection, denote by $\omega(V, m)$ the left-hand side of Eq. (112).

assume that the relationship $m(V)$ corresponding to $\omega(V, m) = 0$ is monotonic, and consider the particular case where $\omega_i < 0$ and $\omega_f > 0$. Under these conditions, the optimum trajectory consists of the following sequence of subarcs (Fig. 9):

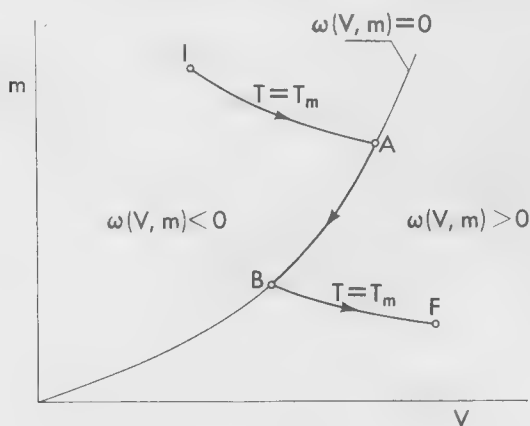


Fig. 9.

Maximum range program for a rocket-powered aircraft
in level flight.

$$(113) \quad T = T_m \rightarrow \omega(V, m) = 0 \rightarrow T = T_m.$$

For a parabolic drag polar, Eq. (112) can be rewritten in the form

$$(114) \quad \frac{2mg_0}{k\rho S} = M^2 \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \sqrt{\frac{1 + (C_{D0})_M + V/V_E}{3 - (K)_M + V/V_E}}.$$

For both the low subsonic regime and the hypervelocity regime, the flight program identified by Eq. (114) requires that the engine be throttled so as to generate a thrust less than the drag at every time instant; hence, there is a negative acceleration so that the velocity decreases as the flight progresses [Ref. 39].

6.2.6. Maximum Endurance of a Rocket-Powered Aircraft in Level Flight. — A modification of the previous problem arises when the endurance is to be maximized in level flight for given

end velocities and given propellant mass; hence, the relationships (50) and (83) are retained. For this problem, the optimum burning program includes subarcs $T = T_m$, subarcs $T = 0$, and variable-thrust subarcs along which the mass-velocity relationship is represented by [Ref. 40]

$$(115) \quad D + V_E \frac{\partial D}{\partial V} - mg_0 \frac{\partial D}{\partial L} = 0$$

which, for the parabolic drag polar, becomes

$$(116) \quad \frac{2mg_0}{k\phi S} = M^2 \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \sqrt{\frac{2 + (C_{D0})_M + V/V_E}{2 - (K)_M + V/V_E}}.$$

For both the low subsonic regime and the hypervelocity regime, this flight program entails a throttling of the engine so as to generate a negative acceleration at every point of the flight path identified by Eq. (116).

6.2.7. Minimum Propellant Consumption for a Rocket in Vertical Flight. — Consider the problem of minimizing the propellant consumption for given terminal velocities and given terminal altitudes, the flight time being free [Ref. 41]. Assuming that the rocket trajectory is vertical and the thrust is tangent to the flight path, one sets

$$(117) \quad G = -m, \quad A = \dot{\gamma} - \frac{\pi}{2}, \quad B = \varepsilon.$$

Consequently, the following result can be obtained: the optimum burning program includes subarcs $T = T_m$, subarcs $T = 0$, and variable-thrust subarcs along which the following relationship is to be satisfied [Refs. 42 and 43]:

$$(118) \quad D \left(\frac{V}{V_E} - 1 \right) + V \frac{\partial D}{\partial V} - mg_0 = 0$$

which is equivalent to [Ref. 44]

$$(119) \quad \frac{2mg_0}{k\phi S} = C_{D0} M^2 \left[1 + (C_{D0})_M + \frac{V}{V_E} \right].$$

Once more, the way in which the different subarcs must be combined depends on the boundary conditions of the problem. In this connection, assume that the atmosphere is isothermal, denote by $\omega(M, m/p)$ the left-hand side of Eq. (118), and assume that the relationship between m/p and the Mach number corresponding to $\omega(M, m/p) = 0$ is monotonic. Also, consider

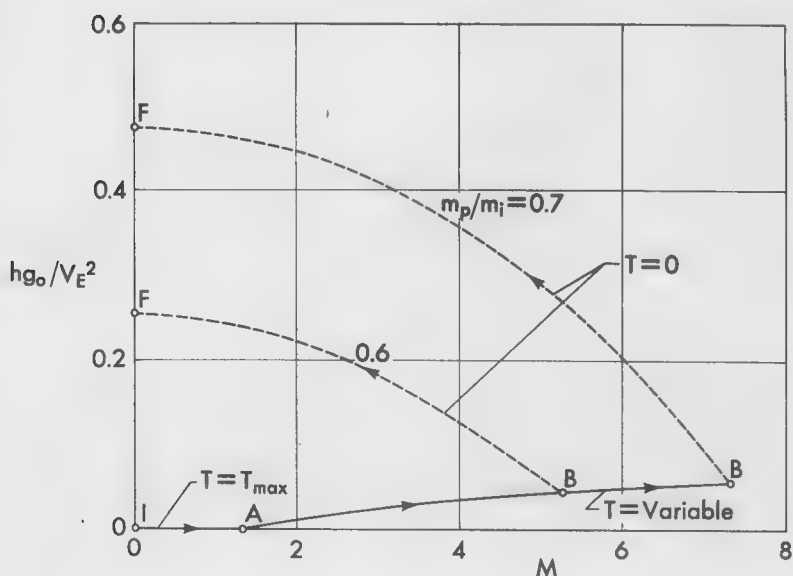


Fig. 10.

Optimum sounding rocket trajectory in the Mach number-altitude domain.

the particular case of a sounding rocket for which both the initial and final velocities are zero so that $\omega_i < 0$ and $\omega_f < 0$. Under these conditions, the optimum trajectory consists of the following sequence of subarcs

$$(120) \quad T = T_m \rightarrow \omega(V, m/p) = 0 \rightarrow T = 0$$

which is represented in Fig. 10 for a typical sounding rocket and for two values of the propellant mass ratio. The corresponding thrust program is qualitatively illustrated in Fig. 11. As can be seen, the variable-thrust portion of the extremal arc

requires a rapidly increasing acceleration as the flight progresses. In some cases, the optimum acceleration is roughly proportional to the square of the instantaneous Mach number.

6.2.8. Brachistocronic Burning Program for a Rocket in Vertical Flight. — A modification of the previous problem arises

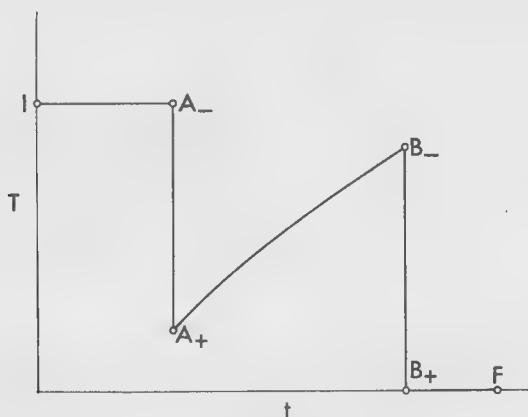


Fig. 11.

Thrust program for a sounding rocket.

when the flight time is to be minimized for given terminal velocities, given terminal altitudes, and given propellant mass. Assuming that the rocket trajectory is vertical and the thrust is tangent to the flight path, one sets

$$(121) \quad G = t, \quad A = \gamma - \frac{\pi}{2}, \quad B = \varepsilon.$$

Consequently, it can be shown that the optimum burning program includes subarcs $T = T_m$, subarcs $T = 0$, and variable-thrust subarcs along which [Ref. 44]

$$(122) \quad D\left(\frac{V}{V_E} - 1\right) + V \frac{\partial D}{\partial V} - mg_0 - H \exp\left(-\frac{V + g_0 t}{V_E}\right) = 0$$

where H is a constant to be determined from the boundary conditions of the problem.

6.3. *Nonsteady Flight over a Spherical Earth.* — If a vehicle is moving with a velocity which is nonnegligible with respect to the escape velocity, the complete set of equations of motion must be employed. The available analytical solutions are few and some of them are presented here.

6.3.1. *Maximum Range of a Hypervelocity Glider.* — Consider the problem of maximizing the range of a glider for given terminal velocities, the flight time being free. For this problem, the functional to be extremized and the additional constraints take the form (71). In order to simplify the analysis, the following assumptions are employed:

$$(123) \quad \frac{h}{r_0} \ll 1, \quad \gamma \ll 1, \quad \frac{mg_0\gamma}{D} \ll 1, \quad \frac{\dot{\gamma}r_0}{V} \ll 1$$

meaning that the flight takes place in the dense portion of the atmosphere, that the path inclination is so small that the weight component on the tangent to the flight path is negligible with respect to the drag, and that the part of the centripetal acceleration which is due to the time rate of change of the path inclination is small with respect to the part which is due to the time rate of rotation of the local horizon. Consequently, one sees that the optimum flight program is represented by [Ref. 45]

$$(124) \quad \frac{\partial D}{\partial h} = 0.$$

Owing to the fact that

$$(125) \quad \frac{\partial^2 D}{\partial h^2} > 0$$

we conclude that, for each given instantaneous velocity, the flight altitude is to be adjusted in such a way that the overall drag is a minimum. For the hypervelocity realm, the path described by Eq. (124) is flown with the maximum lift-to-drag ratio, a continuously decreasing velocity, and a continuously

decreasing altitude (Fig. 12). Furthermore, the maximization of the range occurs simultaneously with the maximization of the endurance.

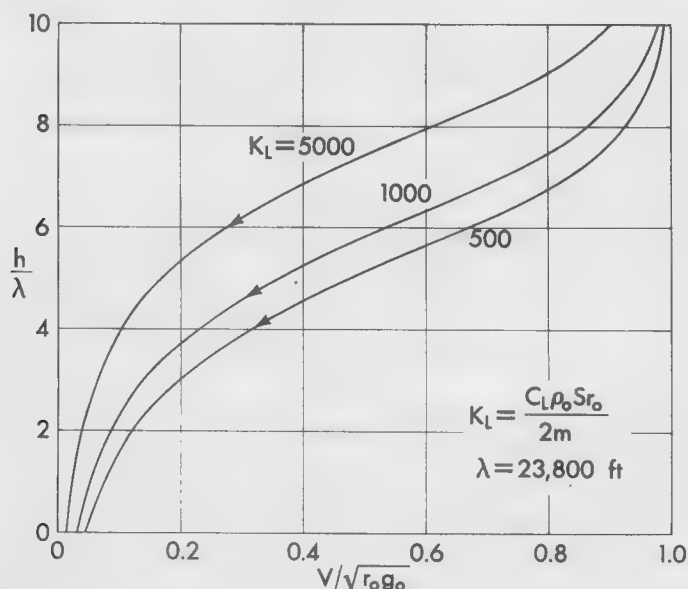


Fig. 12.

Optimum hypervelocity glide trajectory.

6.3.2. *Maximum Range of a Rocket-Powered Aircraft in Level Flight.* — Consider the problem of maximizing the range of a rocket-powered aircraft in level flight for given end velocities and given propellant mass, and assume that the thrust is tangent to the flight path; hence, retain relationships (50) and (78). Under these conditions, the following result can be obtained: the optimum burning program includes subarcs $T = T_m$, subarcs $T = 0$, and variable-thrust subarcs along which [Ref. 46]

$$(126) \quad \left(D - L \frac{\partial D}{\partial L} \right) \left(\frac{V}{V_E} - 1 \right) + V \frac{\partial D}{\partial V} - m \frac{\partial D}{\partial L} \left(g + \frac{V^2}{r_0 + h} \right) = 0.$$

6.3.3. *Minimum Propellant Consumption for a Rocket in Vertical Flight.* — Consider the problem of minimizing the propellant consumption for given terminal velocities and given terminal altitudes, the flight time being free, and assume that the trajectory is vertical; hence, retain relationships (50) and (117). Neglecting the effects due to the Earth's rotation, one sees that the optimum burning program includes subarcs $T = T_m$, subarcs $T = 0$, and variable-thrust subarcs along which [Ref. 46]

$$(127) \quad \dot{D} \left(\frac{V}{V_E} - 1 \right) + V \frac{\partial D}{\partial V} - mg = 0.$$

7. SUMMARY AND CONCLUSIONS.

A general survey is presented of the problem of the optimum trajectories of aircraft, missiles, satellites, and spaceships. This problem falls under the mathematical scheme covered by the formulation of Mayer of the calculus of variations. First, unconstrained optimum trajectories with three degrees of freedom in a great circle plane are discussed with particular regard to the programming of the lift, the thrust direction, and the thrust modulus. The Euler-Lagrange equations, the corner conditions, the transversality condition, the Weierstrass condition, and the Legendre-Clebsch condition are reviewed. Then, constrained optimum trajectories with one degree of freedom are considered, that is, trajectories subjected to two additional arbitrary constraints. In connection with these trajectories, several subclasses are discussed within the broad frame of three main problems: quasi-steady flight over a flat Earth, nonsteady flight over a flat Earth, and nonsteady flight over a spherical Earth.

It is clear from the present survey that much has been achieved in recent years in the field of flight mechanics. Many problems have been conquered. Nevertheless, an even larger domain is still unexplored, both from a theoretical standpoint and with regard to practical engineering applications. There

is an immediate need for improved methods for integrating the system of Euler-Lagrange equations and constraining equations and for solving the associated boundary value problems. An extension of the available closed-form solutions would be of great value with regard to engineering applications. In view of the rather weak character of the maxima and minima in flight mechanics, the finding of shortcuts and simplifications applicable to particular problems would also be valuable. At the present time, the work in the area of sufficient conditions for an extremum lags far behind the work accomplished in obtaining necessary conditions. These sufficiency conditions have given rise to questions, the answers to some of which are still incomplete or unknown, especially in connection with discontinuous extremal solutions.

In the era of supersonic interceptors, supersonic and hypersonic transports, intercontinental missiles, satellites, and interplanetary vehicles, variational methods constitute an indispensable tool in advanced performance calculations. It is the opinion of the writer that, as the industry progresses toward faster vehicles, the calculus of variations will become the standard, rather than the specialized, tool for optimum performance analysis of aircraft and missiles.

REFERENCES

- [1] MIELE A., Editor, *Extremal Problems in Aerodynamics*. Academic Press, New York, 1964.
- [2] CICALA P., *Optimum Problems*. «Purdue University, Engineering Experiment Station», Research Bulletin No. 138, 1958.
- [3] MIELE A., *Flight Mechanics*, Vol. 2: *Theory of Optimum Flight Paths*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (in preparation).
- [4] GODDARD R. H., *A Method of Reaching Extreme Altitudes*. «Smithsonian Miscellaneous Collections», Vol. 71, No. 2, 1919.
- [5] HAMEL G., *Über eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung*. «ZAMM», Vol. 7, No. 6, 1927.
- [6] LIPPISCH A., *Performance Theory of Airplanes with Jet Propulsion*. «Headquarters, Air Materiel Command», Translation Report No. F-TS-685-RE, 1946.

- [7] LUSH K. J., *A Review of the Problem of Choosing a Climb Technique, with Proposals for a New Climb Technique for High Performance Aircraft*. «Aeronautical Research Council», RM No. 2557, 1951.
- [8] MIELE A., *Problemi di Minimo Tempo nel Volo Non Stazionario degli Aeroplani*. «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», Vol. 85 1950-1951.
- [9] CICALA P., *Optimum Airplane Flight Paths*. «NASA», TT No. F-4, 1959.
- [10] CICALA P., *Piecemeal Solutions in the Programming of Optimal Flight Trajectories*. «NASA», TT No. F-3, 1959.
- [11] GARFINKEL B., *Minimal Problems in Airplane Performance*. «Quarterly of Applied Mathematics», Vol. 9, No. 2, 1951.
- [12] HESTENES M. R., *A General Problem in the Calculus of Variations with Applications to Paths of Least Time*. «The Rand Corporation», Report No. RM-100, 1950.
- [13] BREAKWELL J. V., *The Optimization of Trajectories*. «SIAM Journal», Vol. 7, No. 2, 1959.
- [14] FRIED B. D., *Trajectory Optimization for Powered Flight in Two or Three Dimensions*. Space Technology, Chapter 4, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [15] LAWDEN D. F., *Dynamic Problems of Interplanetary Flight*. «The Aeronautical Quarterly», Vol. 6, No. 3, 1955.
- [16] LAWDEN D. F., *Interplanetary Rocket Trajectories*. Advances in Space Science, Vol. 1, Chapter 1, Academic Press, New York, 1959.
- [17] LEITMANN G., *On a Class of Variational Problems in Rocket Flight*. «Journal of the Aerospace Sciences», Vol. 26, No. 9, 1959.
- [18] LEITMANN G., *Extremal Rocket Trajectories in Position and Time Dependent Force Fields*. «AAS», Preprint No. 61-30, 1961.
- [19] MIELE A., *General Variational Theory of the Flight Paths of Rocket-Powered Aircraft, Missiles, and Satellite Carriers*. «Astronautica Acta», Vol. 4, No. 4, 1958.
- [20] MIELE A., *Minimal Maneuvers of High-Performance Aircraft in a Vertical Plane*. «NASA», TN No. D-155, 1959.
- [21] BELLMAN R., *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [22] KELLEY H. J., *Gradient Theory of Optimal Flight Paths*. «ARS Journal», Vol. 30, No. 10, 1960.
- [23] MIELE A., *Flight Mechanics and Variational Problems of a Linear Type*. «Journal of the Aerospace Sciences», Vol. 25, No. 9, 1958.
- [24] MIELE A., *Application of Green's Theorem to the Extremization of Linear Integrals*. «Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Sciences Laboratory», TR No. 40, 1961.

- [25] MIELE A., *The Relation Between the Green's Theorem Approach and the Indirect Methods for Extremal Problems of a Linear Type*. « Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Sciences Laboratory », TR No. 47, 1961.
- [26] MIELE A., *Interrelationship of Calculus of Variations and Ordinary Theory of Maxima and Minima for Flight Mechanics Applications*. « ARS Journal », Vol. 29, No. 1, 1959.
- [27] MIELE A., *Lagrange Multipliers and Quasi-Steady Flight Mechanics*. « Journal of the Aerospace Sciences », Vol. 26, No. 9, 1959.
- [28] BLISS G. A., *Lectures on the Calculus of Variations*. The University of Chicago Press, Chicago, 1946.
- [29] MIELE A., *Flight Mechanics*, Vol. 1: *Theory of Flight Paths*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1962.
- [30] VALENTINE F. A., *The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as Added Side Conditions*. Contributions to the Calculus of Variations, University of Chicago Press, Chicago, 1937.
- [31] KULAKOWSKI L. J. and STANCIL R. T., *Rocket Boost Trajectories for Maximum Burnout Velocity*. « ARS Journal », Vol. 30, No. 7, 1960.
- [32] BRYSON A. E. and DENHAM W. F., *A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems*. « Raytheon Company, Missile and Space Division », Report No. BR-1303, 1961.
- [33] MIELE A., *Variational Approach to the Stratospheric Cruise of a Turbojet-Powered Aircraft*. « ZFW », Vol. 6, No. 9, 1958.
- [34] MIELE A., *General Solutions of Optimum Problems in Nonstationary Flight*. « NACA », TM No. 1388, 1955.
- [35] KELLEY, H. J., FALCO M., and BALL D. J., *Air Vehicle Trajectory Optimization*. Paper presented at the SIAM Symposium on Multi-variable System Theory, Cambridge, Massachusetts, 1962.
- [36] KELLEY H. J., *An Investigation of Optimal Zoom Climb Techniques*. « Journal of the Aerospace Sciences », Vol. 26, No. 12, 1959.
- [37] HEERMANN H., *Green's Theorem Approach to Aircraft Performance Problems*. « Lockheed - California Company », Report LR No. 17553, 1964.
- [38] CICALA P. and MIELE A., *Generalized Theory of the Optimum Thrust Programming for the Level Flight of a Rocket-Powered Aircraft*. « Jet Propulsion », Vol. 26, No. 6, 1956.
- [39] HIBBS A. R., *Optimum Burning Program for Horizontal Flight*. « Journal of the American Rocket Society », Vol. 22, No. 4, 1952.
- [40] MIELE A., *An Extension of the Theory of the Optimum Burning Program for the Level Flight of a Rocket-Powered Aircraft*. « Journal of the Aeronautical Sciences », Vol. 24, No. 12, 1957.

- [41] TSIEN H. S. and EVANS R. C., *Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket*. « Journal of the American Rocket Society », Vol. 21, No. 5, 1951.
 - [42] LEITMANN G., *A Calculus of Variations Solution of Goddard's Problem*. « Astronautica Acta », Vol. 2, No. 2, 1956.
 - [43] LEITMANN G., *Stationary Trajectories for a High-Altitude Rocket with Drop-Away Booster*. « Astronautica Acta », Vol. 2, No. 3, 1956.
 - [44] MIELE A., *Generalized Variational Approach to the Optimum Thrust Programming for the Vertical Flight of a Rocket, Part I, Necessary Conditions for the Extremum*. « ZFW », Vol. 6, No. 3, 1958.
 - [45] MIELE A., *On the Flight Path of a Hypervelocity Glider Boosted by Rockets*. « Astronautica Acta », Vol. 5, No. 6, 1959.
 - [46] MIELE A. and CAPPELLARI J. O., Jr., *Some Variational Solutions to Rocket Trajectories over a Spherical Earth*. Proceedings of the First International Symposium on Rockets and Astronautics, Tokyo, Japan, 1959.
-

La meccanica analitica e il suo sviluppo

(con particolare riguardo al contributo della Scuola italiana).

Riassunto. — Si considerano, in generale, i capisaldi della ricerca nel campo della Meccanica analitica, da Lagrange ad oggi. Ci si sofferma poi sui principali risultati di alcuni gruppi di lavori, con speciale riguardo a quelli compiuti dalla Scuola meccanica italiana.

Parte Prima.

SGUARDO GENERALE AD ALCUNI IMPORTANTI GRUPPI DI RICERCHE

I. — INTRODUZIONE.

Dei « *Philosophiae naturalis Principia mathematica* », che erano stati pubblicati da *Isaac Newton* nel 1686, fu proprio *Lagrange* a dire — con ammirazione commossa — che essi erano la « produzione più alta dello spirito umano ».

E, se *Isaac Newton* trovò, come meccanico celeste, un continuatore in *D'Alembert*, allo stesso modo che *Laplace* trovò in *D'Alembert* un precursore, la Meccanica classica, evolutasi fino ad oggi in una letteratura densa di risultati che fanno onore al progresso scientifico, presenta due cardini di incomparabile importanza e bellezza estetica nelle opere di *Leonardo Eulero* da una parte, di *Giuseppe Ludovico Lagrange* dall'altra.

La celebre « *Mécanique analytique* » del sommo torinese (1788), quel monumento scientifico in cui dominano la for-

mulazione definitiva del principio dei lavori virtuali e la sintesi tra questo e il principio di D'Alembert a costruire le equazioni fondamentali della dinamica, è la base di tutto l'edificio della Meccanica teorica, e condiziona l'opera di *Hamilton*, di *Jacobi*, di *Poincaré*, cioè lo sviluppo della Meccanica analitica, delle discipline meccaniche nuove ed anche di quei corpi di dottrina, come la Meccanica quantistica, che della Meccanica analitica ed, in particolare, del teorema di *Jacobi* e dei principi variazionali sono figli, almeno sul piano logico deduttivo.

La odierna Meccanica teorica non nacque, nè si sviluppò — è evidente — usando i procedimenti razionali con cui cammina oggi, e che mettono il ricercatore nella condizione di poter effettuare spiegazioni e previsioni di fenomeni con sicuro rigore logico.

Le scienze meccaniche acquistarono la forma attuale soltanto dopo che, dalla osservazione sperimentale, emersero i principi di base che ai fatti presiedono e cominciarono a delinarsi le rigorose deduzioni che il metodo matematico consentiva di ricavare.

Se, come « zona » di riferimento per una meditazione sullo sviluppo della Meccanica, si prendono l'autentica rivoluzione operata da *Galileo*, meccanico, astronomo e fisico, fondatore della attuale Dinamica, e l'orma gigantesca segnata da *Newton*, a sinistra e a destra di tale zona nel tempo, ci appare distendersi il lavoro paziente e sofferto, durato per secoli, ed al quale portarono il loco contributo genî ed uomini illustri, ingegni acutissimi ed anche umili ricercatori, poichè nessun grande edificio della scienza umana nasce di getto, prodigiosamente o per opera di uno solo, per quanto grande.

Non sarà, forse, inutile richiamare a noi stessi, in una visione estremamente sintetica, come a volo, il progresso storico della Meccanica nei suoi capisaldi essenziali, quasi per renderci meglio conto della funzione esercitata dal sorgere della Meccanica analitica vera e propria sullo sviluppo moderno della nostra scienza o per ripetere a noi stessi quale sia stato il peso del pensiero *matematico* nella costruzione del grande edificio.

In fondo, mi pare si possa addirittura affermare che i tentativi meccanici di *Aristotele* ebbero carattere scientifico — anche se egli restò, per così dire, ai margini della Dinamica — proprio perchè, anche se non nel senso delle forme tecniche, il pensiero aristotelico procede col serrato rigore delle deduzioni di tipo *matematico*, se è vero — come è vero — che il pensiero aristotelico non presenta mai neppure sfumature di debolezza dal punto di vista logico.

Aristotele stesso, nella sua opera, pose in forma che si può considerare scientifica alcune questioni della Statica, la cui trattazione in senso euclideo doveva essere opera di *Archimede*.

Nel pensiero del siracusano, germina e si concreta l'applicazione delle discipline matematiche allo studio dei fenomeni meccanici, e ciò trova una corrispondenza significativa nell'atteggiamento non solo natural-filosofico, ma filosofico nel senso più vasto e generale dello scienziato stesso, platoniano in Filosofia, discepolo dei discepoli di *Euclide* in Geometria.

Nasce, nel pensiero di *Archimede*, una trattazione veramente euclidea della Statica, viene istituita la teoria dei baricentri, vengono notoriamente disegnate quelle proposizioni della Meccanica dei fluidi che resteranno alla base di tutto lo sviluppo futuro di tale corpo di dottrina.

*
* *

Le scoperte che il genio di *Leonardo da Vinci* donò alla Meccanica, e, più in generale, alla Scienza di tutti i tempi non vengono certo ridotte o sminuite, se si pensano inquadrare in uno sviluppo che giunge alla autentica esplosione di pensiero moderno dei secoli decimoquinto e decimosesto.

Tale sviluppo si estende da *Giordano Nemorario*, rinnovatore della Statica nel secolo decimoterzo a *Giovanni Buridan*, rinnovatore della Dinamica, da *Alberto di Sassonia* a *Nicola Oresne*.

La grande innovazione di *Copernico* fu, dal punto di vista matematico, profondamente influenzata dal motivo condut-

tore delle « armonie matematiche », che domina, per così dire, tutto il pensiero e l'insegnamento di *Domenico Maria Novara*; e la insurrezione scientifica operata da Galileo, sopra tutto con quel « principio di relatività », che giustamente porta il suo nome, è tutta intersecata e permeata dal travaglio *matematico* non solo del pensiero del maestro, ma di quello degli allievi.

Infatti *Evangelista Torricelli* l'autore del Principio fondamentale della Statica dei sistemi pesanti, non sarà soltanto un grande fisico, ma, insieme con *Bonaventura Cavalieri* (« alter Archimes », autore della geometria degli indivisibili « nova quadam ratione promota ») sarà più che un precursore dell'Analisi infinitesimale.

E fu certo grande ventura per la costruzione dell'edificio della nostra scienza che contemporaneo di *Galileo* fosse *Renato Cartesio*, il fondatore — almeno nel senso di completa e coerente impostazione della medesima — della Geometria analitica e — ad un tempo — l'uomo che individuò nel movimento (in una visione meccanicistica che giungerà lontano) il sostrato comune, quasi l'essenza di tutti i fenomeni della natura.

E fu provvidenziale disegno per il progresso scientifico che comparissero nella storia del pensiero figure come quelle di *Cristiano Huygens*, *John Wallis*, *Giovanni*, *Giacomo* e *Daniele Bernoulli*.

Lo spirito essenzialmente filosofico di Cartesio aveva condotto quest'ultimo a considerare già, sostanzialmente, il concetto di lavoro e ad intravedere in quello che sarà il *principio dei lavori virtuali*, già accennato, sia pure nebulosamente, attraverso i secoli, la ragione profonda dell'equilibrio, quindi il fondamento vero della Statica; in Dinamica lo stesso spirito aveva portato Cartesio, oltre che ad una concezione in cui il moto appare già relativo e in cui si delinea il principio di conservazione dell'energia, ad affermare la necessità di una considerazione infinitesimale del movimento stesso. Ma il pensiero di Cartesio è, anzitutto, pensiero filosofico.

Ecco perchè, nel progresso della Meccanica teorica, una orma estremamente incisiva è segnata dall'opera di *Cristiano Huygens*.

Con lui — a parte le geniali ricerche sui pendoli e sull'isocronismo — viene alla luce il principio di conservazione dell'energia e si acquisisce alla scienza il concetto di « momento d'inerzia », con alcune fondamentali sue applicazioni.

Con Huygens nasce anche la Dinamica impulsiva e vengono rigorosamente studiati quei fenomeni d'urto, le ricerche sui quali continueranno con *John Wallis*.

È stato osservato da *Burgatti* che il maggior merito di John Wallis risiede, però, nella adozione di quello che sarà il *principio dei lavori virtuali*, anche se l'eminente matematico inglese non mise in evidenza il carattere infinitesimale del principio.

Senza dubbio difficile appare il cammino del principio dei lavori virtuali su cui si baserà, oltre alla Scienza delle costruzioni, oltre alla Meccanica applicata, la Meccanica analitica moderna.

Tale cammino porta con sè il travaglio di formulazione e di accettazione delle cose veramente fondamentali. Infatti, dopo l'opera di John Wallis, e per circa cinquant'anni, il principio dei lavori virtuali fu di nuovo combattuto, anzi ridotto ad essere considerato come un semplice *corollario alle leggi dell'equilibrio*.

Bisogna giungere al 1717, anno in cui, in una sua lettera a *Varignon*, *Giovanni Bernoulli* colloca il principio dei lavori virtuali tra i principi fondamentali della scienza.

L'importanza del principio dei lavori virtuali in Meccanica teorica, la sua posizione, come dice *Sommerfeld*, « dominante » nella attuale formulazione delle dottrine concernenti la nostra scienza, appaiono in tutta la loro vera luce nella « *Mécanique analytique* » di *Lagrange*, la cui validità attuale è di indubbia evidenza.

E circa la grande generalità del principio va tenuto presente che, in fondo, esso può essere applicato tanto se i vincoli

sono *olonomi*, quanto se i vincoli sono *anolonomi* e che, nella distinzione fra « reazioni » (o « forze di natura geometrica ») e « forze impresse » (o « di origine fisica ») appare la possibilità di inserire l'« attrito statico », come appartenente alla classe delle reazioni e l'« attrito dinamico » come appartenente alla classe delle « forze impresse ».

Mentre, con *D'Alembert* e col suo principio, si conclude l'elaborazione dei principi essenziali della Meccanica, con *Lagrange* si inizia la autentica Meccanica moderna. La quale è, in realtà, tutta Meccanica analitica in senso lato, poichè essa si serve dei metodi matematici per la spiegazione dei fenomeni meccanici, anche se, con la dizione « Meccanica analitica », si intende più propriamente quel complesso di studi e di ricerche che si dipartono dallo studio dei sistemi di equazioni differenziali lagrangiane, che del principio dei lavori virtuali e del principio di *D'Alembert* sono figlie.

Noi non ci soffermeremo certo su quella poderosa evoluzione in senso classico, che conduce alla teoria delle equazioni hamiltoniane, a quell'autentico corpo di dottrina che può essere sintetizzata come « metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi », alla costruzione della Meccanica e alla sua connessione con altri corpi di dottrina fisico-matematici per mezzo dei principi variazionali, alla teoria delle trasformazioni o al passaggio ai sistemi continui, in cui pure la formulazione hamiltoniana esercita un ruolo di fondamentale importanza. Così non ci occuperemo in dettaglio di problemi di Dinamica impulsiva.

Il nostro interesse sarà rivolto a considerare invece, nell'ambito di una vastissima produzione scientifica (che sarebbe letteralmente impossibile abbracciare) alcuni sviluppi moderni della Meccanica analitica e a sottolineare, in particolare, chiedendo scusa per le immancabili omissioni e per i dosaggi certamente non esatti, senza cattiva volontà, alcuni dei contributi dati dalla Scuola italiana allo sviluppo del poderoso corpo di dottrina. Ciò faremo prescindendo dal considerare i contributi allo studio dei problemi di Meccanica celeste, di Teoria delle oscillazioni, di Meccanica quantica e statistica.

2. - SGUARDO GENERALE ALLO SVILUPPO
DELLA MECCANICA ANALITICA, CON PARTICOLARE RIGUARDO
AI CONTRIBUTI DELLA SCUOLA ITALIANA.

Sulla Meccanica analitica, nata, insieme col Calcolo delle variazioni, dal genio di *Lagrange*, particolarmente intensa è stata la fioritura di ricerche in Italia. Come è noto, già *Brioschi* e *Sciacci* si erano occupati della applicazione del metodo di integrazione di *Jacobi*; ed è pure ben noto che il *Morera* aveva dato contributi notevoli nel campo della trasformazione delle equazioni canoniche.

Il *Cerruti*, poi, si occupò della ricerca di un integrale delle equazioni lagrangiane del moto, lineare nelle velocità. Ma veniamo alle ricerche delle quali più da vicino ci interesseremo.

Particolare importanza rivestì il problema, proposto dall'*Appell*, della *determinazione di tutti i sistemi dinamici equivalenti* aventi lo stesso numero di gradi di libertà. Una precisazione successiva di tale problema è opera di *Painlevé* ⁽¹⁾, il quale introdusse la nozione di *sistemi dinamici corrispondenti*, per i quali si ha la conservazione delle traiettorie.

Ora, mentre *Painlevé* aveva segnalato alcune proprietà generali dei sistemi dinamici corrispondenti, e risolto il problema nel caso di due variabili, *Tullio Levi-Civita* ⁽²⁾, con l'ausilio del Calcolo tensoriale, dava la completa risoluzione del problema nel caso in cui sui sistemi non agiscano forze applicate, caso nel quale si ha la conservazione delle geodetiche.

Agostinelli ⁽³⁾, successivamente, con nuovo metodo, determinava tutti i tipi di sistemi dinamici corrispondenti, nel caso in cui le forze agenti non siano tutte uguali a zero.

⁽¹⁾ P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique*, « Journal de Liouville », t. X, 1894; ID., *Sur les transformations des équations de la Dynamique*, « Comptes Rendus », 1896.

⁽²⁾ T. LEVI-CIVITA, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, « Annali di matematica », serie II, t. XXIV, 1896.

⁽³⁾ C. AGOSTINELLI, *Sui sistemi dinamici corrispondenti*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1937.

Un altro gruppo di ricerche è quello che riguarda le cosiddette « curve naturali di un sistema dinamico ».

Dall'equazione differenziale dei sistemi di linee di *Lipka* ⁽⁴⁾ o « sistemi di velocità », nel caso particolare delle forze dipendenti da un potenziale, ponendo in luogo del potenziale una funzione arbitraria del punto rappresentativo del sistema dinamico, mobile sulla « varietà vincolare » il cui ds^2 è definito dall'energia cinetica del sistema, si ha l'equazione delle curve di *Kasner* ⁽⁵⁾, o « famiglie naturali di curve » del sistema dinamico considerato. Si hanno in particolare, le *traiettorie dinamiche*, le *geodetiche*, le *brachistocrone* della varietà riemanniana vincolare. La varietà vincolare è stata particolarmente studiata da *Boggio* ⁽⁶⁾, mentre ricerche sulle curve naturali dei sistemi dinamici sono state compiute da *Agostinelli* e dalla sua Scuola ⁽⁷⁾.

Una delle questioni di fondo per lo sviluppo di tutta la meccanica analitica è quella concernente la risolubilità dei problemi dinamici mediante l'applicazione del metodo di *Hamilton-Jacobi*.

Più precisamente la questione è quella della *determinazione di tutti i tipi di energia cinetica e di sollecitazione corrispondente*

⁽⁴⁾ I. LIPKA, *Note on velocity systems in curved space of N dimensions*, « Publ. of M.I.T. », 1921; ID., *On the geometry of motion in curved N space*, loc. cit., 1921.

⁽⁵⁾ E. KASNER, *Natural families of trajectories in conservative fields of force*, « Transactions of American Mathematical Society », 1909; ID., *Natural families of curves in a general curved space of n dimensions*, « Transactions of American Mathematical Society », 1913.

⁽⁶⁾ T. BOGGIO, *Sulle equazioni della Dinamica dei sistemi*, « Rend. della Accademia nazionale dei Lincei », 1° semestre 1933; cfr. anche: P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, Zanichelli, Bologna 1930.

⁽⁷⁾ C. AGOSTINELLI, *Sui sistemi di velocità e le famiglie naturali di linee in uno spazio curvo*, « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei », Anno LXXXVI, 1933; A. PIGNEDOLI, *Sulle curve naturali di un sistema dinamico*, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », 1947.

per cui l'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi è integrabile per separazione di variabili.

Il problema era stato posto da *Stäckel*, il quale lo aveva risolto nel caso in cui l'energia cinetica è una forma quadratica ortogonale, mentre — come è ben noto — un caso più particolare di integrabilità era stato segnalato in precedenza da *Liouville*.

Sul problema stesso compì importanti ricerche *Levi-Civita* ⁽⁸⁾, il quale ricavò le condizioni per la possibilità del problema e stabilì anche un criterio che caratterizza i tipi di problemi dinamici per i quali l'equazione dinamica di *Hamilton-Jacobi* è risolubile per separazione di variabili.

Dell'Acqua ⁽⁹⁾ risolveva la questione completamente nel caso di tre variabili; e *Burgatti* ⁽¹⁰⁾ assegnava, con un metodo brillante, $(n - 1)$ nuovi casi di integrabilità nel caso di n variabili.

Agostinelli ⁽¹¹⁾ riprendeva il problema nel 1937, in una Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino, e chiudeva la questione stessa nel caso generale di n variabili, tenendo presente il criterio di classificazione di *Levi-Civita*, ed introducendo un opportuno algoritmo basato su una approfondita indagine delle proprietà geometriche della varietà metrica collegata col problema dinamico. *Venivano determinati così tutti i tipi di forze vive per cui l'equazione di Hamilton-Jacobi, in assenza di forze, è integrabile per separazione di variabili.*

In una Nota del Reale Istituto Veneto, poi, lo stesso *Agostinelli* determinava il potenziale delle forze, nel caso in cui queste non sono nulle.

⁽⁸⁾ T. LEVI-CIVITA, « *Mathematische Annalen* », Bd. LIX, 1904.

⁽⁹⁾ F. A. DELL'ACQUA, « *Mathematische Annalen* », Bd. LXVI, 1908.

⁽¹⁰⁾ P. BURGATTI, « *Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei* », Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali, 1911.

⁽¹¹⁾ C. AGOSTINELLI, « *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino* », 1937; ID., « *Atti del R. Istituto Veneto* », Classe di Scienze matematiche e naturali, 1937.

Il problema della stabilità dei fenomeni di moto, e, più in generale, delle soluzioni dei sistemi differenziali, questione la cui origine si trova proprio nella « *Mécanique analytique* » di *Lagrange*, il quale aveva istituito il metodo delle piccole oscillazioni, era stato successivamente approfondito da *Dirichlet*, *Poincaré*, *Lyapunov* ⁽¹²⁾.

Levi-Civita assegnò, notoriamente, un metodo molto generale per lo studio della stabilità, e contributi notevoli in materia furono poi dati da meccanici italiani: *R. Einaudi*, *G. Sestini*, *G. Colombo*, *R. Nardini* ⁽¹³⁾.

Nei lavori di *Einaudi* è studiato a fondo il problema della stabilità per sistemi generali differenziali non lineari e per sistemi differenziali lineari a coefficienti periodici.

Levi-Civita ⁽¹⁴⁾ diede anche un contributo profondo alla risoluzione del problema concernente la ricerca di soluzioni per quei sistemi canonici che ammettono più integrali primi o più relazioni invarianti « in involuzione » fra di loro.

E concretò anche notevoli ricerche su quella *teoria degli invarianti adiabatici*, da lui stesso fondata, che tanto interessa

⁽¹²⁾ J. L. LAGRANGE, *Mécanique analytique*, Paris 1788; L. DIRICHLET, « J. reine und angew. Math. », 1846; H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*, Paris 1892, 1893, 1899 (3 volumi); ID., *Leçons de mécanique celeste*, Paris 1905, 1907, 1910 (3 volumi); A. LYAPUNOV, « Ann. Fac. Sci. Toulouse », 1907; T. LEVI-CIVITA, « Comptes Rendus », 1900 (3 lavori); ID., « Annali di matematica pura ed applicata », 1901; ID., « Prace Mat. Fin. », 1906; ID., « Annales de l'École normale sup. de Paris », 1911; ID., « Acta mathematica », 1919.

⁽¹³⁾ R. EINAUDI « Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1935; ID., « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », 1936; G. SESTINI, « Rivista di Matematica dell'Università di Parma », 1951 e 1954; ID., « Atti del IV Congresso dell'U.M.I. », Taormina 1951; G. COLOMBO, « Rendic. del Seminario matematico dell'Università di Padova », 1953; R. NARDINI, « Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei », 1949.

⁽¹⁴⁾ T. LEVI-CIVITA, « Atti del Congresso internazionale di Matematica », Bologna 1928; ID., « American Monthly », 1934; G. D. MATIOLI, « Annali di Matematica pura ed applicata », 1936.

la Meccanica atomica. Egli ricondusse tale dottrina alle proprietà integrali dei sistemi canonici e la applicò alla Meccanica celeste. Dall'indirizzo di Levi-Civita nella teoria di tali invarianti adiabatici discendono anche le ricerche, coronate da pieno successo, di *G. D. Mattioli*.

Circa la teoria degli invarianti adiabatici, va notato che, mentre gli invarianti adiabatici hanno trovato, anche nella loro impostazione primitiva, applicazioni notevoli in Meccanica atomica, per merito di *Sommerfeld*, *Burges*, *Epstein* ed altri, non così è avvenuto in Meccanica analitica, dove la teoria ha peraltro raggiunto un assetto pressochè definitivo. Intendiamo sottolineare il fatto che finora il metodo degli integrali adiabatici non ha dato tutti i risultati che dovrebbe pur fornire, se si fa eccezione per le ricerche di Meccanica celeste.

In Meccanica celeste, *Giulio Krall* ⁽¹⁵⁾ ha ripreso, col metodo degli invarianti adiabatici, lo studio del moto di una particella in una nebula gassosa, ha ritrovato i *teoremi di media di Poincaré*, ha esteso tali teoremi al caso in cui ci siano dissipazioni interne, non aventi carattere adiabatico, per le quali manca, quindi, l'integrale $H = E$; ciò ha fatto utilizzando i cosiddetti *invarianti adiabatici relativi* studiati da *Geppert*.

Ma, per quanto riguarda il metodo degli invarianti adiabatici, vogliamo qui ricordare in particolare i lavori di *Dario Graffi* ⁽¹⁶⁾. In tali lavori, l'autore assegna un limite superiore per l'errore commesso, qualora i parametri non varino nel modo che assicura l'invarianza adiabatica; le ricerche in questione hanno poi applicazione, ad opera dello stesso autore, tanto nel problema dei due corpi di massa variabile, quanto per ciò che concerne gli integrali ciclici che un ruolo così impor-

(15) G. KRALL, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1931-1932-1933; ID., *Meccanica tecnica delle vibrazioni* (redatta con la collaborazione di R. EINAUDI), Zanichelli, Bologna 1940.

(16) D. GRAFFI, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1932; ID., « Atti Accademia delle Scienze di Torino » (due lavori), 1933; ID., « Annali di Matematica pura e applicata », 1936-37.

tante rivestono nella Meccanica quantistica di *Bohr-Sommerfeld*. Certe estensioni delle ricerche di Graffi, sono state conseguite, per più gradi di libertà, da *Aymerich*.

A questo punto, non è certo possibile non sottolineare il fatto che un problema di centrale interesse per tutta la Meccanica analitica, nel senso più vasto del termine, è quello degli *invarianti* in generale; problema che tanto interessa anche la moderna questione delle *mete asintotiche* cui tendono i sistemi dinamici (la questione si originò dalle profonde meditazioni di *Poincaré* sulle ipotesi cosmogoniche).

Grande importanza hanno, per lo sviluppo della Meccanica analitica di oggi e di domani, l'*ipotesi ergodica* e quella *quasi-ergodica*.

Birkhoff, *Koopman*, *von Neumann* ⁽¹⁷⁾ ed *Hopf* ⁽¹⁸⁾ hanno dato contributi assai notevoli alla teoria, giungendo, in particolare, a quel *teorema ergodico* della Meccanica classica (che ha anche trovato estensione in Meccanica quantica) il quale si può considerare alla base di un vasto indirizzo della Meccanica analitica futura, o, come dice Krall ⁽¹⁹⁾, della Meccanica analitica moderna.

Abbiamo voluto richiamare tutto ciò, e per la estrema importanza del corpo di dottrina in questione per lo sviluppo moderno della Meccanica analitica, e perchè tra le immediate

⁽¹⁷⁾ Cfr. G. D. BIRKHOFF, «Proc. Nat. Acad. Sc.», t. 17, 1931; J. VON NEUMANN, *Physical applications of the ergodic Hypothesis*, «Proc. Nat. Acad. Sc.», t. 18, 1932; B. O. KOOPMAN, *Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert space*, «Proc. Nat. Acad. Sc.», t. 17, 1931.

⁽¹⁸⁾ E. HOPF, *Complete transitivity and the ergodic principle*, «Proc. Nat. Acad. Sc.», t. 18, 1932; ID., *Proof of Gibb's Hypothesis on the Tendency toward statistical equilibrium*, «Proc. Nat. Acad. Sc.», t. 18, 1932; ID., *Ergodentheorie*, «Ergebnisse der Mathematik», Springer, Berlino 1937; cfr. anche M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space*, «Proc. Nat. Acad. Sc.», t. 16, 1930.

⁽¹⁹⁾ G. KRALL, *Mete lontane del moto dei sistemi dinamici*, «Tecnica italiana», 1947.

applicazioni del criterio di sostituzione delle medie spaziali alle medie temporali vi è proprio la teoria degli invarianti adiabatici.

Sottolineeremo ancora l'estremo interesse del sorgere e dell'affermarsi della *Dinamica topologica*. Essa trova la sua origine nei classici lavori di *Poincaré* e *G. D. Birkhoff* ⁽²⁰⁾.

Poincaré fu il primo a risolvere problemi di dinamica come problemi di Topologia. *Birkhoff* ⁽²¹⁾ vi portò fondamentali contributi e ne promosse lo studio sistematico. Ora non è certo necessario rilevare ancora una volta qui l'importanza del celebre teorema di *Brouwer* «del punto unito» ⁽²²⁾ per la teoria dei sistemi dinamici o per la meccanica delle oscillazioni non lineari.

Importa tenere ben presente che oggi non è che la Meccanica si serva di *qualche* metodo o di *qualche* risultato topologico. Oggi, invece, è del tutto impiantata e condotta avanti una *Dinamica topologica* ⁽²³⁾, come studio dei gruppi di trasformazioni con riguardo a quelle proprietà topologiche che apparvero subito connesse con la Dinamica classica. Una buona messe di risultati sono stati ottenuti così, senza considerare i movimenti come retti da sistemi differenziali.

Ma veniamo ad altre ricerche e soffermiamoci a considerare altri risultati, in particolare alcuni risultati conseguiti dalla Scuola meccanica italiana.

Per quanto riguarda la Meccanica dei sistemi, va segnalato che la dimostrazione della ben nota condizione per l'equi-

⁽²⁰⁾ H. POINCARÉ, «Rendiconti Circolo mat. Palermo», 1912; G. D. BIRKHOFF, «Trans. American Math. Society» 1912; «Acta Szeged», 1928; «Acta Mathem.» 1925 e 1927.

⁽²¹⁾ G. D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, «Amer. Mathem. Society», New York 1927.

⁽²²⁾ L. E. J. BROUWER, «Math. Ann.», 1910; cfr. anche S. LEFSCHETZ, *Differential equations (Geometric Theory)*, «Interscience Publishers», New York 1957.

⁽²³⁾ Vedi: GOTTSCHALK-HEDLUND, *Topological Dynamics*, «Amer. Mathem. Society», 1955 e l'ampia bibliografia ivi riportata.

librio di un sistema olonomo con n gradi di libertà ed in assenza di attrito ha dato luogo ad interessanti ricerche di *Signorini* ⁽²⁴⁾ e di *Cattaneo* ⁽²⁵⁾. Il *Cattaneo* ha dimostrato la sufficienza del principio dei lavori virtuali per l'equilibrio di un sistema materiale particellare soddisfacente ad ampie condizioni di regolarità, soggetto a vincoli fissi (anche scabri) e che possono essere in parte olonomi bilaterali ed in parte anolonomi, anche unilaterali, evitando l'ipotesi della continuità delle reazioni vincolari effettive.

Aldo Bressan ⁽²⁶⁾ si è occupato della determinazione del più generale sistema a vincoli olonomi bilaterali e lisci con n gradi di libertà, soggetto ad una sollecitazione dipendente anche dall'atto di moto e derivante da un potenziale generalizzato. Inoltre egli ha studiato questioni di regolarità e di unicità del moto in presenza di vincoli olonomi unilaterali. Infine, partendo dai risultati precedentemente stabiliti da *Boggio* con l'ausilio della « varietà vincolare », si è occupato della determinazione delle equazioni di Hamilton anche nel caso di vincoli variabili, e ciò facendo uso di metodi puramente geometrico-tensoriali.

Sono anche stati studiati in Italia particolari sistemi lagrangiani ⁽²⁷⁾ con forze dipendenti dalle accelerazioni, con applicazione, in particolare, al moto di due corpuscoli elettriz-

⁽²⁴⁾ A. SIGNORINI, *Meccanica razionale*, vol. II, 2ª edizione, p. 337, Ed. Perrella, Roma 1954.

⁽²⁵⁾ C. CATTANEO, « Rendiconti di Matematica », Università di Roma, luglio-dicembre 1954.

⁽²⁶⁾ A. BRESSAN, « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », 1950; ID., « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », 1959; ID., « Annali dell'Università di Ferrara », 1959.

⁽²⁷⁾ A. PIGNEDOLI, « Atti della Soc. dei Naturalisti e Matematici di Modena », vol. LXXVII, 1946; ID., « Annali di matematica pura ed applicata », 1961; ID., « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Classe di Scienze fisiche, matem. e naturali, 1960; ID., *Meccanica relativistica e moto di particelle elementari*, « Atti del Congresso U.M.I. di Napoli », 1959.

zati l'uno in presenza dell'altro, supponendo la sollecitazione come rappresentata dalla legge elettrodinamica di *Weber*.

Ora non possiamo dimenticare un problema che ha sempre rivestito grande importanza e che oggi è diventato di centrale interesse per le applicazioni tecniche dei giroscopi, applicazioni che è forse superfluo sottolineare, e per la vasta messe di questioni connesse col lancio e con la rotta dei veicoli spaziali: il moto di un corpo rigido con un punto fisso ⁽²⁸⁾.

Lazzarino si è occupato di alcuni casi singolari della teoria dei solidi asimmetrici pesanti e della questione della equivalenza delle equazioni differenziali di *Hess-Schiff* e di *Eulero-Poisson*.

Manarini si è occupato di un teorema di *Staupe-Van der Woude* ed anche di alcune notevoli proprietà del centro di inerzia, relative alle rotazioni permanenti del solido dotato di un punto fisso.

⁽²⁸⁾ Cfr. O. LAZZARINO, « Atti della R. Accad. dei Lincei », 1916 (tre lavori); ID., « Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa », 1938 (due lavori); M. MANARINI, « Atti della R. Accademia dei Lincei », 1931; ID., « Bollettino U.M.I. », 1948; A. PIGNEDOLI, « Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena », 1945; G. GRIOLI, « Annali di Matematica pura e applicata », 1947; ID., « Annali della Scuola normale superiore di Pisa », 1949; ID., « Rendiconti di Matematica », Roma 1947; C. AGOSTINELLI, « Atti del Seminario mat. e fis. di Modena », 1949; ID., « Annali di Matematica pura e applicata », 1949; T. ZEULI, « Rend. Seminario matem. Univ. e polit. di Torino », 1950; C. COLOMBO, « Rend. Seminario matem. Università di Padova », 1951; A. NADILE, *Esercitazioni matematiche*, Catania 1950; M. R. FABBRI, « Rend. Accad. naz. dei Lincei », Classe Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1934, tre lavori; B. GRISERI, « Rend. Seminario matem. Univ. e Politecnico di Torino », 1950; F. DE SIMONI, « Annali della Scuola normale sup. di Pisa », 1942; P. UDESCHINI, « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », Classe Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1942; G. ARRIGHI, « Memorie della Accademia naz. dei Lincei », 1947; E. DE ANGELI, « Rendiconti della Accad. naz. dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1937; T. MANACORDA, « Rendiconti della Accademia naz. dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1949; ID., « Rivista di matematica dell'Università di Parma », 1950; ID., « Ricerca Scientifica », 1950.

È stato anche studiato (Pignedoli) il moto di un corpo rigido pesante sempre intorno ad un punto fisso, quando il punto fisso è prossimo al baricentro od il corpo è poco differente dall'avere struttura giroscopica.

Grioli si è occupato con successo della esistenza e della determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico, delle questioni di stabilità che riguardano le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico e del moto intorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla.

Agostinelli e poi *Zeuli* hanno studiato il caso di moto in cui il solido pesante asimmetrico ha il baricentro appartenente all'asse di uno dei piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia.

Colombo ha compiuto osservazioni sulla stabilità dei moti merostatici di un giroscopio, con applicazioni.

Sempre sul problema del moto di un solido con un punto fisso esistono lavori di *Manacorda*, *Nadile*, *Fabbri*, *Griseri* e *De Simoni*; in particolare sui giroscopi sono state fatte ricerche da *Udeschini*, *Stoppelli*, *Arrighi* e *De Angeli*.

E veniamo agli studi sulla Dinamica dei sistemi anolonomi. Sull'argomento è quasi superfluo ricordare che il *Volterra* aveva stabilito le equazioni fondamentali del moto di un sistema anolonomo, isolando i termini di anolonomia e mettendo in rilievo il carattere girostatico di tali termini. Le equazioni dei sistemi anolonomi furono poi messe in forma nuova, semplice, espressiva ed elegante dal *Maggi*. Dalle equazioni del Maggi, come si sa, si deducono in modo facile le equazioni trovate dal *Volterra* ed anche quelle estremamente sintetiche di *Appell* ⁽²⁹⁾.

(²⁹) Cfr. E. VOLTERRA, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 1897; cfr. anche G. HAMÉL, «Mathematische Annalen», 1924; A. MAGGI, *Principi di stereodinamica*, Hoepli, Milano 1903; T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, parte I, Zanichelli, Bologna 1926; P. APPELL «Comptes Rendus», 1899; ID., «Journal de Crelle», 1900; ID., «Journal de Math.», 1900.

E veniamo ai contributi di ricerca che, nel campo della Dinamica dei sistemi anolonomi, sono stati dati più recentemente.

Lampariello ed *Agostinelli* e la sua Scuola ⁽³⁰⁾ si sono occupati particolarmente della applicabilità alla Dinamica dei sistemi anolonomi del metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi. *Lucia Venturelli* e *C. Agostinelli* ⁽³¹⁾ si sono occupati dei sistemi anolonomi con un gruppo di coordinate ignorate.

La Scuola di *Agostinelli* ⁽³²⁾ si è occupata della ricerca, per i sistemi anolonomi, dell'esistenza di particolari integrali (esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane) ed in generale della ricerca di relazioni invarianti « in involuzione » (secondo una opportuna generalizzazione della corrispondente nozione per i sistemi olonomi).

Tale ricerca di relazioni invarianti, o, in particolare, di integrali, è fatta in vista del difficile problema della integrazione delle equazioni differenziali del moto dei sistemi anolonomi. Avremo occasione di citare più avanti altre notevoli ricerche compiute all'estero, oltre che in Italia.

⁽³⁰⁾ G. LAMPARIELLO, « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », 1942 (vi appaiono tre lavori sull'argomento); A. PIGNEDOLI, « Atti del Seminario matematico e fisico di Modena », 1946; ID., « Atti del Seminario matematico e fisico di Modena », 1947; C. AGOSTINELLI, « Rendiconti della Accademia nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1949 (vi appaiono due lavori sull'argomento).

⁽³¹⁾ L. VENTURELLI, « Atti del R. Istituto Veneto », anno 1938-39, t. XCVIII, p. II; C. AGOSTINELLI, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 80, 1944-45.

⁽³²⁾ A. PIGNEDOLI, « Atti del Seminario matematico e fisico di Modena », 1946; ID., « Atti del Seminario matem. e fisico di Modena », 1946; C. AGOSTINELLI, « Atti del Seminario matem. e fisico di Modena », 1947-48; ID., « Bollettino U.M.I. », 1956

Parte Seconda.

ESPOSIZIONE DEI PRINCIPALI RISULTATI
DI ALCUNE RICERCHE,
CON PARTICOLARE RIGUARDO A QUELLE COMPIUTE
DALLA SCUOLA MECCANICA ITALIANA

I. — RICERCHE SUI « SISTEMI DINAMICI CORRISPONDENTI ».

Per *sistemi dinamici corrispondenti* si intendono, secondo la definizione di *Painlevé* ⁽³³⁾, due sistemi (A) ed (A_1) soggetti a vincoli fissi, con gli stessi gradi di libertà, ma, in generale, distinti, sia per la diversa natura che per le forze che li sollecitano; sistemi le cui equazioni del moto siano, rispettivamente (con chiaro simbolismo):

$$(A) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i,$$

$$(A_1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = E_i,$$

con

$$(1_1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^n a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \right),$$

$$(2_1) \quad T_1 = \frac{1}{2} \sum_i^n b_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt_1} \right),$$

e tali che le traiettorie dei due sistemi coincidano, pur essendo diversa, in ognuno di essi, la legge temporale con cui quelle traiettorie vengono percorse. In altri termini, se si attribuiscono alle coordinate lagrangiane $x_1, x_2, \dots, x_n$ ed alle velocità gli stessi valori iniziali, i due movimenti hanno, nello spazio rappresentativo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la stessa traiettoria.

⁽³³⁾ Cfr. P. PAINLEVÉ, « Journal de Liouville », t. X, 1894 (già cit.); ID., « Comptes Rendus » 1896 (già cit.).

Painlevé, il quale stabilì diverse proprietà generali dei sistemi dinamici corrispondenti, non assegnò, tuttavia, in modo esplicito, le condizioni sufficienti affinché un dato sistema (A) ammetta dei sistemi corrispondenti (A_1). Comunque non diede condizioni in forma tale da consentire di affrontare il problema della integrazione.

Però risolveva il problema della determinazione di tutti i sistemi dinamici corrispondenti nel caso di due variabili.

Il problema veniva ripreso da *Levi-Civita* ⁽³⁴⁾, il quale risolveva completamente il problema posto da *Painlevé* nel caso in cui sui due sistemi non agiscono forze, ed assegnava, in questo caso, *tutti i tipi di sistemi corrispondenti per i quali si abbia la conservazione delle geodetiche*.

Del problema generale della determinazione dei sistemi corrispondenti con n gradi di libertà, nel caso in cui le forze agenti non siano tutte nulle, si è occupato C. Agostinelli ⁽³⁵⁾, il quale, *dopo aver stabilito le equazioni differenziali che legano due sistemi corrispondenti, e dopo aver dimostrato alcuni teoremi generali, procede all'integrazione delle equazioni differenziali sopra dette, assegnando tutti i tipi di sistemi dinamici corrispondenti, non privi di forze, che presentano effettivo interesse*.

Nella ricerca, l'Agostinelli si serve dell'Analisi vettoriale generale ed opera, essenzialmente, sulle varietà vincolari V_n e V'_n nel senso di Boggio ⁽³⁶⁾, relative ai due sistemi corrispondenti (A) ed (A_1), e per cui, detti $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i punti che rispettivamente, le descrivono, si ha:

$$(3_1) \quad dQ^2 \equiv ds^2 = 2Tdt^2 = \sum_I a_{ij} dx_i dx_j,$$

$$(3'_1) \quad dQ_1^2 \equiv ds_1^2 = 2T_1 dt_1^2 = \sum_I b_{ij} dx_i dx_j;$$

⁽³⁴⁾ T. LEVI-CIVITA, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, « Annali di Matematica », serie II, t. XXIV, 1896.

⁽³⁵⁾ C. AGOSTINELLI, *Sui sistemi dinamici corrispondenti*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1937.

⁽³⁶⁾ T. BOGGIO, « Rend. della R. Acc. naz. dei Lincei », 1933, già cit.

indicando poi con $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{F}_I$ due vettori rispettivamente tangenti alle varietà V_n e V'_n nei punti Q e Q_I , tali che è

$$\mathbf{F} \times \frac{\partial Q}{\partial x_i} = X_i, \quad \mathbf{F}_I \times \frac{\partial Q_I}{\partial x_i} = E_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

le equazioni del moto dei due sistemi assumono la forma:

$$(4_I) \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (4'_I) \quad \frac{d^2 Q_I}{dt_I^2} = \mathbf{F}_I,$$

dove le derivate sono eseguite « tangenzialmente » nel senso di *Boggio*. Partendo da queste premesse l'*Agostinelli*, come ho detto, esaurisce la questione.

2. - RICERCHE SULLE « CURVE NATURALI » DI UN SISTEMA DINAMICO.

Com'è noto, ad un sistema olonomo con n gradi di libertà si può fare corrispondere un punto $P = P(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t)$, funzione dei parametri lagrangiani indipendenti, che in ogni istante individuano la posizione del sistema, e del tempo t . Tale punto si chiama *immagine del sistema*.

Indicando invero con $Q_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t)$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) i vari punti del sistema considerato, con x_{3i-2} , x_{3i-1} , x_{3i} le coordinate cartesiane ortogonali del punto Q_i , con X_{3i-2} , X_{3i-1} , X_{3i} le componenti della forza applicata al punto Q_i , la cui massa sia m_i , e introducendo le quantità positive μ_i tali che:

$$\mu_{3i-2} = \mu_{3i-1} = \mu_{3i} = m_i,$$

l'equazione fondamentale della Dinamica può scriversi:

$$(I_2) \quad \sum_{r=1}^{3v} \left(\mu_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} - X_r \right) \delta x_r = 0.$$

Essa deve essere verificata per tutti gli spostamenti virtuali compatibili coi vincoli. Consideriamo ora uno spazio euclideo S_{3v} con $3v$ dimensioni e interpretiamo con *Hertz* le x_r come coordinate cartesiane ortogonali in tale spazio; indichiamo

poi con $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_{3\nu}$ dei vettori unitari, a due ad due ortogonali, paralleli agli assi coordinati di origine O .

Siano P ed $\mathbf{f}$ il punto ed il vettore rispettivamente definiti dalle

$$(2_2) \quad \begin{cases} (P - O) = \sum_{r=1}^{3\nu} \sqrt{\mu_r} x_r \mathbf{I}_r, \\ \mathbf{f} = \sum_{r=1}^{3\nu} (X_r / \sqrt{\mu_r}) \mathbf{I}_r. \end{cases}$$

La (1_2) può scriversi allora:

$$(3_2) \quad \left(\frac{d^2 P}{dt^2} - \mathbf{f} \right) \times \delta P = 0.$$

Data una posizione del sistema olonomo considerato, è determinato in modo unico il punto P , che può, dunque, considerarsi come *immagine* del sistema in questione. Assegnando al tempo t un valore determinato, l'equazione $P = P(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ mostra che il punto P descrive una ben determinata varietà V_n con n dimensioni immersa nello spazio euclideo $S_{3\nu}$.

Al variare del tempo t , la V_n si muove nello spazio $S_{3\nu}$. La V_n si chiama, con Boggio, *varietà vincolare* e risulta fissa in $S_{3\nu}$ se i vincoli sono indipendenti dal tempo.

L'equazione differenziale (3_2) deve essere verificata per tutti gli spostamenti virtuali invertibili del punto P compatibili coi vincoli, quindi δP ha direzione tangente alla V_n (considerato t come costante); perciò il vettore $\frac{d^2 P}{dt^2} - \mathbf{f}$ deve essere normale alla varietà vincolare. Si può dunque scrivere:

$$(4_2) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} - \mathbf{f} = \mathbf{R}, \quad (4'_2) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathbf{R}$$

essendo $\mathbf{R}$ un vettore normale alla V_n in P , che si può interpretare come *reazione vincolare* della V_n pensata come vincolo liscio. Proiettando ambo i membri della $(4'_2)$ ortogonalmente sullo spazio euclideo tangente alla V_n in P , si ha

$$(5_2) \quad P''_v = \mathbf{f}_v$$

essendo P_v'' ed f_v le proiezioni dei vettori $P'' = \frac{d^2P}{dt^2}$ ed f (*).

La curva di V_n descritta dai punti-immagine P si chiama *traiettoria del sistema* e risulta determinata dalla equazione differenziale (5₂) e dalle condizioni iniziali. L'integrazione della (5₂), con le condizioni iniziali, fornisce, dunque, il moto di P sulla varietà vincolare, cioè il moto dell'immagine del sistema considerato.

Se si pone:

$$ds = \text{mod } dP, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad s'' = \frac{ds'}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot s',$$

quindi:

$$(6_2) \quad P_v'' = \frac{d_v^2 P}{dt^2} = \frac{d_v}{dt} \left(\frac{dP}{ds} \right) s' + \frac{dP}{ds} s'' = \frac{d_v^2 P}{ds^2} s'^2 + \frac{dP}{ds} s'',$$

dalla equazione (5₂) si ottiene:

$$(7_2) \quad \frac{d^2 P}{ds^2} = \frac{1}{s'^2} \left(f_v - f_v \times \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dP}{ds} \right) \quad (37).$$

Nel caso particolare, di evidente interesse, in cui le forze siano conservative e posizionali, di potenziale U , indipendente dal tempo, si ha

$$f_v = \text{grad}_v U,$$

e la (5₂), usando, per semplicità, i simboli ordinari di derivazione, diventa:

$$(5'_2) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} = \text{grad } U.$$

(*) Dunque P'' è la *derivata seconda superficiale*, nel senso di BOGGIO, del punto P rispetto al parametro temporale t (vedi P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, Zanichelli, Bologna 1930, già cit.).

(37) Cfr. AGOSTINELLI, «Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», 1937; ID., «Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei», Anno LXXXVI, 1933, già cit.

Ne discende l'integrale delle forze vive:

$$(8_2) \quad \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 = 2(U + h), \quad (h \text{ costante}).$$

La (7₂) si trasforma, allora, nella:

$$(9_2) \quad \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{1}{2(U + h)} \left(\text{grad } U - \text{grad } U \times \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dP}{ds} \right),$$

che è l'equazione differenziale delle traiettorie del punto mobile sulla varietà vincolare V_n , in dipendenza di forze conservative dipendenti da un potenziale U , cioè l'equazione differenziale delle traiettorie dinamiche del sistema.

Essa si può scrivere:

$$(9'_2) \quad \text{grad } \sqrt{2(U + h)} - \frac{d}{ds} \left[\sqrt{2(U + h)} \frac{dP}{ds} \right] = 0,$$

ove, al solito e come nel seguito, le derivate ed i gradienti sono calcolati tangenzialmente alla V_n .

Dalla (9'₂) risulta che, per un dato valore della costante h delle forze vive, la traiettoria di P sulla V_n è determinata dalla condizione di passare per un punto assegnato e di avere ivi data tangente.

Per un punto P di V_n passano perciò ∞^{n-1} traiettorie, cioè tante quante sono le direzioni tangenti alla V_n uscenti da P , e la totalità di esse, per un dato valore di h , è $\infty^{2(n-1)}$, e, al variare di h , sono ∞^{2n-1} .

Se, nella (7₂), si sostituisce in luogo di s'^2 (che è il quadrato della velocità del punto mobile P , in generale variabile da punto a punto) una costante $\frac{1}{k}$ si ottiene l'equazione differenziale dei sistemi di linee di Lipka, o sistemi di velocità:

$$(10_2) \quad \frac{d^2P}{ds^2} = k \left(f_v - f_v \times \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dP}{ds} \right) \quad (38).$$

(38) Cfr. I. LIPKA, «Pubbl. of M.I.T.» 1921, già cit.; ID., «Pubbl. of M.I.T.», 1921 nuova nota sull'argomento, già cit.

Nel caso particolare delle forze dipendenti da un potenziale U , l'equazione differenziale dei sistemi di linee di Lipka diventa:

$$(11_2) \quad \frac{d^2 P}{ds^2} = k \left(\text{grad } U - \text{grad } U \times \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dP}{ds} \right).$$

Ponendovi $kU = L(P)$, si ottiene:

$$(12_2) \quad \frac{d^2 P}{ds^2} = \text{grad } L - \text{grad } L \times \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dP}{ds}.$$

I sistemi di curve soddisfacenti alla (12_2) , con L funzione arbitraria di P , si chiamano *sistemi* o *famiglie naturali di curve* e sono stati introdotti da Kasner ⁽³⁹⁾.

La proprietà fondamentale delle curve di Kasner è la stazionarietà, lungo le medesime, dell'integrale:

$$I = \int F ds,$$

con F funzione di P , *caratteristica* del dato sistema di curve.

Essendo cioè, F una funzione del punto P di V_n , cioè una funzione di parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$, si considereranno le curve di V_n per cui l'integrale

$$(13_2) \quad I = \int_A^B F ds$$

esteso ad un arco di una di esse compreso fra due punti fissi A e B sia stazionario, sia nulla, cioè, la variazione:

$$(14_2) \quad \delta I = \delta \int_A^B F ds,$$

quando si passi dall'arco considerato ad un altro infinitamente vicino, appartenente alla stessa varietà V_n , e compreso fra gli stessi estremi fissi A e B .

⁽³⁹⁾ E. KASNER, « Trans of Am. Math. Society », 1909 e 1913, già cit.; C. AGOSTINELLI, lavori citati; A. PIGNEDOLI, « Atti del Seminario matematico e fisico di Modena », 1947.

Se ne deduce l'equazione differenziale geometrica delle curve naturali della varietà metrica V_n , caratterizzata dalla funzione $F(P)$:

$$(14_2) \quad \frac{d_2 P}{ds^2} = \frac{1}{F} \left(\text{grad } F - \frac{dF}{ds} \cdot \frac{dP}{ds} \right).$$

Assumendo $F = \sqrt{2(U + h)}$, si ha l'equazione delle *traiettorie dinamiche del sistema*, cioè delle curve di V_n che rendono stazionaria (minima) l'azione.

Se si assume, invece, $F = \text{costante}$, si hanno le *geodetiche* di V_n .

Se si pone $F = 1/\sqrt{2(U + h)}$, si ottengono le *brachistocrone* di V_n .

Un'altra famiglia notevole di curve naturali è quella delle *catenarie* di V_n , che sono le figure di equilibrio, in V_n , di un filo flessibile ed inestendibile, sottoposto a forze conservative di potenziale U .

Circa il moto di un punto su di una linea naturale (priva d'attrito) della varietà vincolare V_n , valgono le seguenti proposizioni:

I) *Nel moto lungo una brachistocroma di V_n , la reazione normale relativa a V_n è uguale ed opposta al doppio dell'analoga componente normale della forza agente sul punto mobile (generalizzazione di un noto teorema di Eulero relativo alle brachistocrone dello spazio ordinario).*

II) *Nel moto lungo una geodetica di V_n la reazione normale di questa, relativa a V_n , è uguale ed opposta all'analoga componente normale della forza agente.*

III) *Nel moto lungo una catenaria di V_n la reazione normale relativa a V_n risulta uguale alla componente normale, relativa a V_n , della forza agente.*

Si possono anche formulare alcuni teoremi sulla integrazione delle equazioni differenziali delle linee naturali.

Vale anzitutto la seguente proposizione:

I) *Le linee naturali di funzione caratteristica F , appartenenti alla varietà metrica V_n , coincidono con le traiettorie dinamiche di un punto dello stesso spazio, sollecitato da una forza di potenziale $U = \frac{1}{2} F^2$, e corrispondenti al valore nullo dell'integrale dell'energia.*

Dalla proposizione sopra scritta, poi, tenuto conto del teorema di *Jacobi*, si deduce:

II) *Se dell'equazione differenziale alle derivate parziali:*

$$(15_2) \quad \frac{1}{2} \sum_{h,k}^n a_{hk} \frac{\partial W}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial W}{\partial q_k} - \frac{1}{2} F^2 = 0$$

si conosce un integrale completo $W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ contenente $(n-1)$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, le equazioni in termini finiti delle curve naturali della varietà metrica V_n definita dal

$$ds^2 = \sum_{h,k}^n a_{hk} dq_h dq_k$$

e caratterizzata dalla funzione F (essendo $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ nuove costanti arbitrarie) risultano:

$$(16_2) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}.$$

Dalle proposizioni I) e II) segue poi la proposizione:

III) *Se $W(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ è un integrale completo della equazione differenziale (15₂), tenendo fisse le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ e facendo variare le $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$, le (16₂) definiscono un sistema ∞^{n-1} di curve naturali della varietà V_n caratterizzate dalla funzione F , le quali tagliano ortogonalmente le ipersuperficie $W = \text{costante}$.*

3. - RICERCHE SU CERTI SPECIALI SISTEMI LAGRANGIANI.

Un particolare interesse presentano, per lo studioso di Meccanica analitica, certi speciali sistemi lagrangiani, dotati di vincoli variabili col tempo, e soggetti a forze dipendenti dalle accelerazioni.

Sia dato il sistema lagrangiano:

$$(I_3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r, \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n),$$

e si supponga l'esistenza di un potenziale cinetico della forma:

$$(2_3) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} = T + U(q_1, \dots, q_n, t) + \sum_{s=1}^n U_s(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_s + \\ + \frac{1}{2} \sum_{st}^n U_{st}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_s \dot{q}_t, \quad (U_{st} = U_{ts}). \end{aligned}$$

Le equazioni lagrangiane del moto (I_3) si trasformeranno in generale, in virtù delle (2_3) , nelle equazioni seguenti:

$$(I'_3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial V}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r} \right),$$

$(r = 1, 2, \dots, n)$

con

$$V = U + \sum_s^n U_s \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{st}^n U_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t \quad (40)$$

Nel caso più generale in cui i vincoli dipendano dal tempo, le (I'_3) diventano:

$$(I''_3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} + \sum_s \left(\frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s + \\ + \frac{1}{2} \sum_{st} \left(\frac{\partial U_{st}}{\partial q_r} - \frac{\partial U_{rs}}{\partial q_t} - \frac{\partial U_{rt}}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s \dot{q}_t - \frac{\partial U_r}{\partial t} - \sum_s \frac{\partial U_{rs}}{\partial t} \dot{q}_s - \\ - \sum_s U_{rs} \ddot{q}_s. \end{aligned}$$

(40) Cfr. E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Dover Publications, New York 1944 cap. II p. 44.

Le componenti lagrangiane delle forze sono funzioni lineari delle accelerazioni e quadratiche delle velocità. Inversamente, si può affermare che, quando le componenti lagrangiane delle forze sono di tale forma, esiste il potenziale cinetico $\mathfrak{L}$.

Considerando il caso in cui i vincoli siano indipendenti dal tempo, si avrà:

$$(3_3) \quad \mathfrak{L} = T + V = \frac{1}{2} \sum_{rs}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + U + \sum_s^n U_s \dot{q}_s + \\ + \frac{1}{2} \sum_{st}^n U_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t,$$

con le a_{rs} , U , U_s ed U_{st} dipendenti soltanto dalle coordinate lagrangiane. Se si fa l'ulteriore ipotesi della ignorabilità di m coordinate, per fissare le idee $q_1, q_2, \dots, q_m$ (con $m < n$), allora sussistono gli m integrali primi dei corrispondenti momenti cinetici:

$$(4_3) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + U_i + \sum_s^n U_{si} \dot{q}_s = \alpha_i, \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove le α_i sono m costanti.

In questo caso si trova che il sistema considerato si riduce ad un sistema olonomo con $(n - m)$ gradi di libertà, dotato di forza viva $\mathfrak{T}^* = \frac{1}{2} \sum_{rs}^n b_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$ e soggetto a forze dipendenti dal potenziale:

$$\mathfrak{U} = U - \frac{1}{2} \sum_{ij}^m \Phi^{ij} (\alpha_i - \mathfrak{U}_i) (\alpha_j - \mathfrak{U}_j), \quad (4^1)$$

essendo $\Phi^{ij} = \Phi^{ji}$ l'elemento reciproco di $a_{ij} + U_{ij}$ nel determinante delle $\|a_{ij} + U_{ij}\|$ ed $\mathfrak{U}_h = U_h + \sum_{ij}^m \Phi^{ij} (\alpha_j - \mathfrak{U}_j) b_{ih}$, con $b_{ih} = a_{ih} + U_{ih}$.

(⁴¹) Cfr. A. PIGNEDOLI, « Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena », vol. LXXVII, 1946, già cit.

*
* *

Un caso particolare al quale sono applicabili i risultati precedentemente esposti è quello del moto relativo di due particelle elettrizzate P_1 e P_2 assimilabili a punti materiali, dotate di masse m_1 ed m_2 , di cariche rispettive e_1 ed e_2 e che si suppongono inter-agenti secondo lo schema rappresentato dalla legge elettrodinamica di *Weber* ⁽⁴²⁾.

Il moto relativo delle due particelle è piano. Assumendo, allora, il piano del moto come piano (x, y) , con l'origine in P_2 , e riferendo P_1 alle coordinate polari r e θ , le equazioni lagrangiane del moto relativo sono:

$$(5_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} r - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2} \right), \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \quad r^2\dot{\theta} = \gamma, \text{ (costante)}, \end{array} \right.$$

dove è $\mu = e_1 e_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$ e c è la velocità della luce nel vuoto.

Il potenziale cinetico è, in questo caso:

$$(6_3) \quad \mathfrak{L} = T + V = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{c^2} \cdot \frac{\dot{r}^2}{r}.$$

Sussiste l'integrale dell'energia:

$$(7_3) \quad \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{c^2} \cdot \frac{\dot{r}^2}{r} - \frac{\mu}{r} = h, \quad (\text{costante}).$$

e tenendo conto dell'integrale delle aree, $r^2\dot{\theta} = \gamma$, il problema di moto considerato si riduce alle quadrature.

*
* *

Per una particella dotata di energia relativistica, le equazioni del moto si possono derivare, come si sa, da un principio variazionale della forma:

$$(8_3) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{L}_p + \mathfrak{L}_i) dt = 0,$$

⁽⁴²⁾ W. WEBER, « Annalen der Physik », Band LXXIII, 1848.

il quale esprime la stazionarietà dell'integrale hamiltoniano di azione. Nella (8₃) $\mathcal{L}_p$ sta ad indicare « la funzione lagrangiana della particella », caratterizzante, appunto, la medesima come non sollecitata da campi di forza, ed $\mathcal{L}_i$ la « funzione lagrangiana di inter-azione », dipendente dall'esistenza e dalla struttura del campo di forza sollecitante la particella stessa.

Si ha l'estensione delle proposizioni della Meccanica classica, con l'esistenza dell'integrale primo relativistico delle forze vive e con l'esistenza, nel caso di ignorabilità di una coordinata, del corrispondente integrale primo relativistico del momento cinetico coniugato. Se le forze generalizzate sono funzioni lineari delle accelerazioni e quadratiche delle velocità, si estendono le proposizioni che valgono in Meccanica classica. Certo che va tenuto presente quanto segue: il problema del passaggio dalle equazioni relativistiche del moto di una singola particella a quelle del moto di un sistema rigido di punti materiali presenta le note grandi difficoltà dovute, essenzialmente, al fatto che la nozione di corpo rigido non può essere « sic et simpliciter » introdotta in teoria della relatività, e al fatto che non è possibile in relatività conservare la legge newtoniana di azione e reazione (43). Tale passaggio appare, dunque, in generale, non effettuabile.

Per quanto riguarda il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato veloce in presenza di un altro uguale ad esso, ed in uno schema — al solito — non quantistico, se si assume come schema di inter-azione elettrodinamica fra due particelle quello fornito dalla formula di Weber (44) (che, pur non fornendo la reale inter-azione, risulta analiticamente maneg-

(43) Cfr. W. PAULI, « Encykl. der Mathem. Wissenschaften », vol. 2; J. L. SYNGE, « Transactions of Royal Society of Canada », (3), 28, 1934; O. COSTA DE BEAUREGARD, *La Théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris 1949.

(44) La legge di Weber non fornisce, notoriamente, la reale interazione fra i due corpuscoli. La teoria relativistica diretta della interazione in parola è stata fatta da H. ARZELIÈS (*La dynamique relativiste et ses applications*, I, Gauthier-Villars, Paris 1957).

gevole e fornisce alcuni risultati espressivi anche nella impostazione in cui si tenga conto della variazione della massa con legge relativistica) le equazioni lagrangiane relativistiche del moto relativo di una particella rispetto all'altra pensata come ferma sono:

$$(9_3) \left\{ \begin{aligned} m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}}} - \frac{4e^2 \dot{r}}{m_0 r c^2} \right) - \\ - \frac{m_0 r \dot{\theta}^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}}} + \frac{2e^2}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) = 0, \\ m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}}} \right) = 0; \end{aligned} \right.$$

essendo la funzione lagrangiana « totale » la seguente:

$$(10_3) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}} + \frac{2e^2}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right).$$

Sussistono l'integrale primo relativistico dell'energia

$$(11_3) \quad m_0 c^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2e^2}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) + h, \\ (h \text{ costante}),$$

e l'integrale primo relativistico del momento della quantità di moto:

$$(12_3) \quad m_0 r^2 \dot{\theta} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = A, \quad (A \text{ costante}).$$

Ne discende la possibilità di una completa discussione dei moti in questione ⁽⁴⁵⁾.

⁽⁴⁵⁾ Vedi: A. PIGNEDOLI, « Atti del Congresso U.M.I. di Napoli », 1959; Id., « Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna »,

4. — RICERCHE SULLA INTEGRAZIONE
DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI HAMILTON-JACOBI
PER SEPARAZIONE DI VARIABILI.

I casi più notevoli in cui si riesce ad assegnare effettivamente un integrale completo della equazione alle derivate parziali di Jacobi sono quelli in cui è applicabile il *criterio della separazione delle variabili*. Riferendosi al caso di un sistema olonomo con n gradi di libertà, sollecitato da forze dipendenti da un potenziale, e dotato di vincoli indipendenti dal tempo, l'equazione di Jacobi

$$(1_4) \quad H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h$$

ammette la separazione delle variabili se si può soddisfare ad essa con una funzione della forma:

$$(2_4) \quad W = W_1(q_1) + \dots + W_n(q_n) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i).$$

Tale possibilità sussiste soltanto se la funzione hamiltoniana ha forma particolare.

Il primo caso classico presentatosi è — come si sa — quello segnalato da *Liouville* e nel quale l'energia cinetica è della forma:

$$(3_4) \quad T = \frac{1}{2} (A_1 + \dots + A_n) (B_1 \dot{q}_1^2 + \dots + B_n \dot{q}_n^2),$$

con A_1 e B_1 funzioni soltanto di q_1 ; A_2 e B_2 funzioni soltanto di q_2 , ... e così via. Il potenziale U è poi della forma:

$$(4_4) \quad U = \frac{U_1(q_1) + \dots + U_n(q_n)}{A_1 + \dots + A_n}.$$

serie XI, tomo VII, 1960; ID., «Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena», 1946; ID., «Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena», vol. II, 1947-48.

Si ha, in tal caso, l'equazione di Jacobi:

$$(5_4) \quad \frac{1}{2(A_1 + \dots + A_n)} \left[\frac{1}{B_1} \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \dots + \frac{1}{B_n} \left(\frac{\partial W}{\partial q_n} \right)^2 \right] - \frac{U_1 + \dots + U_n}{A_1 + \dots + A_n} = h,$$

che, come è noto, si integra per separazione di variabili.

Un'altra classe di problemi dinamici alla quale si può applicare il metodo della separazione delle variabili è quella segnalata da *Stäckel*, sempre nell'ipotesi che la forza viva sia una forma quadratica ortogonale nelle velocità lagrangiane.

Considerate n^2 funzioni $\varphi_{rs}(q_s)$, $r, s = 1, 2, \dots, n$, tali che ciascuna dipenda dalla sola q_s il cui indice coincide col secondo indice della funzione considerata, sia il determinante D delle φ_{rs} non identicamente nullo; indicando con Ψ_r ($r = 1, 2, \dots, n$) i reciproci degli elementi di una delle righe del determinante D , per esempio degli elementi della n -esima riga, si avrà:

$$(6_4) \quad \sum_{r=1}^n \varphi_{nr} \Psi_r = 1,$$

(e questa fa vedere che le Ψ_r non sono tutte uguali a zero); per cui, convenendo di limitare la variabilità delle q ad un campo nel quale le Ψ_r si mantengano tutte diverse da zero, e considerando il problema dinamico nel quale l'energia cinetica ed il potenziale siano dati, rispettivamente, dalla

$$(7_4) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \frac{1}{\Psi_r} \dot{q}_r^2$$

e dalla

$$(8_4) \quad U = \sum_{r=1}^n \Psi_r U_r(q_r),$$

con le $U_1(q_1), \dots, U_r(q_r), \dots, U_n(q_n)$ finite e regolari nel campo che si considera, l'equazione di Jacobi diventa, in tale caso

$$(9_4) \quad \sum_{r=1}^n \Psi_r \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial q_r} \right)^2 - U_r \right] = h,$$

e si integra anch'essa per separazione di variabili.

Veramente la questione che lo Stäckel si era posto era quella di determinare tutti i problemi dinamici con vincoli indipendenti dal tempo e sollecitati da forze di tipo conservativo per i quali l'equazione differenziale di Jacobi sia integrabile per separazione di variabili.

Lo Stäckel riuscì a segnalare il caso che abbiamo richiamato e, nello stesso tempo, assegnò le condizioni per la possibilità del problema, condizioni che furono poi ricavate, sotto nuova forma, da *Tullio Levi-Civita*.

Levi-Civita ⁽⁴⁶⁾ stesso provò anche che, se un problema dinamico conservativo, di hamiltoniana $H = (T) - U$, è integrabile per mezzo della separazione delle variabili, anche il problema corrispondente del moto spontaneo con assenza di forze (cioè quello retto dall'equazione $(T) = h$, gode di tale proprietà). Lo stesso Autore assegnava poi le condizioni ulteriori (concernenti tanto la energia cinetica quanto il potenziale delle forze) per le quali continua ad essere possibile, anche con forze non uguali a zero, la separazione delle variabili.

Tullio Levi-Civita forniva inoltre un criterio di classificazione di tutti i problemi dinamici che possono essere risolti per separazione di variabili ed assegnava anche un altro caso particolare di integrabilità.

Per $n = 2$, la questione era stata discussa ed esaurita dal *Morera* ⁽⁴⁷⁾ e fu più tardi compiuta anche per $n = 3$ dal *Dall'Acqua* ⁽⁴⁸⁾. Il *Burgatti* ⁽⁴⁹⁾ assegnava poi, nel caso di n variabili, $(n - 1)$ nuovi tipi di equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili. Di una questione analoga, relativa alla equazione di *Schrödinger* della Meccanica ondulatoria e limitatamente a forme quadratiche ortogonali, si è

⁽⁴⁶⁾ T. LEVI-CIVITA, « *Mathematische Annalen* », Bd. LIX, 1904.

⁽⁴⁷⁾ MORERA, « *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* », vol. XVI, 1881.

⁽⁴⁸⁾ F. A. DALL'ACQUA, « *Mathematische Annalen* », Bd. LXVI, 1908.

⁽⁴⁹⁾ P. BURGATTI, « *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* », 1911.

occupato lo *Eisenhart* ⁽⁵⁰⁾. Successivamente della questione si è occupato anche *Agostinelli* ⁽⁵¹⁾ in una nota pubblicata nel Bollettino dell'Unione Matematica Italiana.

Per quanto riguarda il problema in generale, la risoluzione sistematica del medesimo nel caso di n variabili comportava grandissime difficoltà. Nei lavori di *Liouville*, *Stäckel*, *Painlevé*, *Goursat*, *Levi-Civita*, *Di Pirro* ⁽⁵²⁾ venivano assegnati tipi notevoli di sistemi dinamici che ammettono integrali quadratici; tipi, però, che, come osservò *Levi-Civita*, erano ancora lontani dall'esaurire la questione.

* * *

La questione fu ripresa da *Agostinelli* nel 1937 ⁽⁵³⁾ in un profondo lavoro che si concretò in una Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Considerando un sistema dinamico, a vincoli indipendenti dal tempo e con n gradi di libertà, individuato dai parametri lagrangiani $x_1, x_2, \dots, x_n$, quindi di energia cinetica

$$(10_4) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n a_{rs} \dot{x}_r \dot{x}_s, \quad (a_{rs} = a_{sr}),$$

$$(T) = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n a^{rs} p_r p_s, \quad \left(p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right),$$

dove le a^{rs} sono gli elementi reciproci dei termini a_{rs} nel determinante formato coi coefficienti a_{rs} , l'*Agostinelli* tiene presente il risultato di *Levi-Civita*, secondo il quale i tipi di forze

⁽⁵⁰⁾ L. P. EISENHART, « Annals of Mathematics », 1934 e 1935.

⁽⁵¹⁾ C. AGOSTINELLI, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » 1958.

⁽⁵²⁾ R. LIOUVILLE, « Journal de Mathématique », XV, 1849; P. STÄCKEL, « Comptes Rendus », 1893; ID., « Annali di Matematica », 1897; P. PAINLEVÉ, « Comptes Rendus », 1897; E. GOURSAT, « Comptes Rendus », 1893; T. LEVI-CIVITA, « Comptes Rendus », 1897; G. DI PIRRO, « Annali di Matematica », 1896.

⁽⁵³⁾ C. AGOSTINELLI, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1937.

vive che rendono integrabile per separazione di variabili (integrale completo $W = \sum_{i=1}^n W_i(x_i)$ con W_i funzione del solo parametro x_i) l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$(I1_4) \quad H\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}; x_1, x_2, \dots, x_n\right) = h,$$

dove h è la costante dell'energia e dove è $\frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i$, ($i = 1, \dots, n$), rendono anche integrabile per separazione di variabili l'equazione:

$$(I2_4) \quad (T) = h$$

dei sistemi dinamici con vincoli indipendenti dal tempo e non soggetti a forze. (L'Agostinelli ha poi successivamente determinato la funzione U delle forze). Indicando con $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il punto che descrive la varietà riemanniana V_n tale che

$$(I3_4) \quad dQ^2 = 2Tdt^2 = \sum_{r,s}^n a_{rs} dx_r dx_s,$$

cioè la varietà vincolare, siccome l'equazione $(T) = h$ definisce le geodetiche di V_n ⁽⁵⁴⁾, il problema in questione equivale al problema geometrico di determinare *tutte le varietà riemanniane* per cui la equazione delle geodetiche sia integrabile per separazione di variabili.

Sono proprio le proprietà geometriche stabilite relativamente alla struttura della varietà vincolare, che rendono possibile all'Autore l'integrazione delle equazioni di condizione e, quindi, la risoluzione della questione.

Il primo caso considerato dall'Autore è quello in cui si abbia

$$(I4_4) \quad \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0, \quad \text{per } r, s \neq i; \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

⁽⁵⁴⁾ P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, Zanichelli, Bologna 1930, già cit.

condizioni cui vanno aggiunte le seguenti:

$$(15_4) \quad a^{nj} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0, \quad (r, s \neq j; \quad j \neq n),$$

$$(16_4) \quad \sum_l a^{nl} \frac{\partial a_{rl}}{\partial x_j} - a^{nj} \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_j} = 0,$$

$$(17_4) \quad \sum_l a^{nl} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} a^{nj} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j} = 0, \\ (r, j \neq n; \quad r \neq j).$$

In tale caso l'Autore rileva che le ipersuperficie $x_n = \text{costante}$ della varietà vincolare sono applicabili sopra un S_{n-1} euclideo, e questo risultato gli consente di assegnare, elegantemente, la soluzione del relativo problema.

L'Autore passa poi al caso generale in cui delle condizioni (14₄) siano soddisfatte quelle corrispondenti a k valori dell'indice i , e cioè si abbia:

$$(18_4) \quad \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0, \quad \text{per } r, s \neq i; \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ 1 < k < n - 1;$$

mentre non siano tutte nulle le derivate $\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}$ per $r, s \neq i$ e per ognuno dei valori dell'indice i compreso fra $k + 1$ ed n . Per questi residui valori dell'indice i devono essere soddisfatte, invece, le condizioni:

$$(19_4) \quad a^{ij} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_l a^{il} \frac{\partial a_{rl}}{\partial x_j} - a^{ij} \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_j} = 0,$$

$$(20_4) \quad \sum_{l=1}^n a^{il} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} a^{ij} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j} = 0, \\ (r, s, j \neq i; \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n).$$

Viene stabilito che la varietà vincolare V_n deve essere tale che i sistemi di varietà W_k , immerse in V_n e definite da $x_{k+1} = \text{cost.}$, $x_{k+2} = \text{cost.}$, ..., $x_n = \text{cost.}$ (ove $1 < k < n - 1$) devono essere applicabili su di un S_k euclideo. Dopo ciò, la

risoluzione del problema risulta notevolmente agevolata e l'Autore ne assegna così due soluzioni, nelle quali interviene un sistema $(n - k) - plo$ ortogonale, costituito da ipersuperficie coordinate.

Nell'ultima parte della Memoria, l'Autore considera direttamente il caso di $k = 1$, e dimostra come, dalle relazioni che egli ha stabilito, segua, in particolare, la soluzione corrispondente al caso di *Stäckel*.

5. - RICERCHE SULLA DINAMICA DEI SISTEMI ANOLONOMI.

Un altro gruppo di problemi che interessano in maniera essenziale lo sviluppo della Meccanica analitica è quello concernente la Dinamica dei sistemi anOLONOMI.

È ben noto come vi sia perfetta equivalenza fra le equazioni lagrangiane del moto di un sistema oLONOMO ed il principio variazionale di Hamilton:

$$(1_5) \quad \delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta L) dt = 0.$$

Era naturale che nascesse la questione circa la possibilità, o meno, di dedurre dal principio di Hamilton stesso equazioni differenziali del moto anche in casi più generali, come quello dei sistemi anOLONOMI, nel quale, come si sa, si presentano quelle particolari difficoltà, per l'applicazione dei teoremi della Meccanica analitica, che furono segnalate da *Neumann*, *Vierkandt*, *Hadamard*, *Carvallo*, *Korteweg* ed altri ⁽⁵⁵⁾, e delle quali la più saliente è proprio la non applicabilità delle equazioni lagrangiane.

Come si sa, se si considera un sistema con vincoli bilaterali e privi d'attrito, esprimibili mediante relazioni in termini

(⁵⁵) Cfr. C. NEUMANN, *Grundzüge der analytischen Mechanik*, « Berichte der Königl. sächs. Gesell. der Wiss. zu Leipzig », 1888; A. VIERKANDT, « Monatshefte für Mathematik und Physik », t. III, 1892; J. HADAMARD, « Société des Sciences de Bordeaux », 1895; CARVALLO, « Journal de l'École Polytechnique », 1900; D. KORTEWEG, « Nieuw Archief », 1899.

finiti fra le coordinate dei diversi suoi punti, e se $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ sono gli n parametri lagrangiani indipendenti che determinano la posizione del sistema, dall'equazione generale della Dinamica si deducono per esso le equazioni lagrangiane del moto. Se il sistema considerato è sottoposto ad ulteriori *vincoli di mobilità* espressi da m , ($m < n$) relazioni lineari nelle velocità lagrangiane e fra di loro indipendenti, cioè del tipo:

[illegible]

le quali *non* siano illimitatamente integrabili, e dove i coefficienti b_{ij} sono funzioni note dei parametri lagrangiani ed eventualmente del tempo, si ricavano le n equazioni del moto del sistema anolonomo considerato seguenti:

$$(35) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_1 b_{1r} + \lambda_2 b_{2r} + \dots + \lambda_m b_{mr},$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono moltiplicatori lagrangiani.

Queste debbono coesistere con le equazioni dei vincoli di mobilità e costituiscono con esse un sistema di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ quantità incognite $q_1, q_2, \dots, q_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$; e servono pertanto a determinare tali quantità.

Una forma notevole delle equazioni del movimento di un sistema anolonomo è assegnata dal *Maggi*. Le equazioni dei vincoli anolonomi vengono messe sotto la forma:

$$(4_5) \quad \dot{q}_r = \sum_{s=1}^{n-m} \beta_{rs} \omega_s + \beta_{r0}, \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dove gli ω_s sono $(n - m)$ nuovi parametri arbitrari e le β_{rs} sono determinate funzioni delle q e del tempo t nel caso di vincoli dipendenti dal tempo, mentre, nel caso di vincoli indipendenti dal tempo, le β_{rs} , per $s = 1, 2, \dots, n - m$ sono fun-

zioni delle sole q e le β_{ro} sono identicamente nulle. I parametri arbitrari ω_s introdotti si chiamano *caratteristiche cinetiche del sistema* in coordinate q , poichè esse definiscono tutti i possibili *atti di moto* che il sistema può effettivamente assumere, compatibilmente coi suoi vincoli, a partire da un certo istante, e dalla configurazione del sistema in quell'istante.

Le equazioni del Maggi che, insieme alle sopra scritte equazioni dei vincoli anolonomi, forniscono la completa impostazione differenziale del problema del moto del sistema anolonomo considerato, sono le seguenti:

$$(55) \quad \sum_{r=1}^n \beta_{rs} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} \right] = \sum_{r=1}^n \beta_{rs} Q_r, \\ (s = 1, 2, \dots, n - m).$$

Orbene, riferendosi al principio di Hamilton, va tenuto presente che la sua portata è estremamente generale, quando si mediti sul fatto che esso si può applicare anche alla deduzione delle equazioni differenziali del movimento dei sistemi anolonomi ⁽⁵⁶⁾.

* * *

Una questione di grande importanza sui sistemi anolonomi è certamente quella consistente nel porsi la domanda se il metodo di Hamilton-Jacobi sia applicabile o meno alla dinamica dei sistemi anolonomi stessi. La questione è stata inizialmente affrontata da *Lampariello* ⁽⁵⁷⁾ in tre lavori pubblicati sui Rendiconti della R. Accademia d'Italia.

La generalizzazione in parola risulta possibile quando, per un sistema olonomo con n gradi di libertà, si esprimono le equazioni del moto in *quasi-coordinate* ⁽⁵⁸⁾ nel senso di

⁽⁵⁶⁾ Cfr. O. HÖLDER, « Gött. Nach. », 1896, p. 122; A. VOSS, « Gött. Nach. », 1900, p. 322; G. HAMEL, « Math. Annalen », CXI, 1935, p. 94.

⁽⁵⁷⁾ G. LAMPARIELLO, « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », 1942; ID., *loc. cit.*, 1942; ID., *loc. cit.*, 1942.

⁽⁵⁸⁾ E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1927.

Whittaker, introducendo n caratteristiche cinetiche ω funzioni lineari delle velocità lagrangiane $\dot{q}$, dipendentemente dal fatto che l'equazione di Jacobi presenta un certo carattere invariante di fronte alle trasformazioni lineari che fanno passare dalle $\dot{q}$ alle ω (ciò risulta dimostrato — limitatamente al caso di vincoli indipendenti dal tempo — in un lavoro di Dobronravov ⁽⁵⁹⁾, in cui ci si fonda su note equazioni stabilite da Hamel ⁽⁶⁰⁾).

Ora, supponendo di conoscere gli integrali di un sistema olonomo con n gradi di libertà, in quasi-coordinate e derivanti da un integrale completo della corrispondente equazione di Jacobi, integrali che caratterizzano le q in funzione di t mediante relazioni della forma

$$(6_5) \quad q_i = q_i(t, c_1, c_2, \dots, c_n; c'_1, c'_2, \dots, c'_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

contenenti $2n$ costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_n; c'_1, c'_2, \dots, c'_n$; quando al sistema materiale si impongano m ulteriori vincoli di mobilità anolonomi con $m < n$, espressi dall'annullarsi di m delle caratteristiche cinetiche ω , per esempio

$$(7_5) \quad \omega_{n-m+1} = 0, \quad \omega_{n-m+2} = 0, \quad \dots, \quad \omega_n = 0,$$

Lampariello utilizza gli integrali ottenuti per la risoluzione del nuovo problema.

Il problema tuttavia, data la sua intrinseca difficoltà e la sua delicatezza dal punto di vista critico, ha dato luogo a diverse ricerche successive della Scuola di Agostinelli ⁽⁶¹⁾. È stata dimostrata la seguente proposizione:

Il problema del moto di un sistema materiale soggetto a vincoli bilaterali e privi di attrito, la cui posizione in ogni istante

⁽⁵⁹⁾ V. V. DOBRONRAVOV, « C.R. de l'Academie des Sciences de l'URSS », 1939.

⁽⁶⁰⁾ G. HAMEL, « Zeit für Mathem. und Physik », 1904; ID., « Mathem. Annalen », 1904.

⁽⁶¹⁾ Cfr. A. PIGNEDOLI, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », 1946; ID., *loc. cit.*, 1947; C. AGOSTINELLI, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1949.

si possa individuare mediante n parametri lagrangiani, e soggetto ancora ad m vincoli di mobilità anolonomi ($m < n$), si può risolvere col metodo di Jacobi, quando sia possibile determinare una funzione V dei parametri lagrangiani e del tempo, contenente $n - m$ costanti arbitrarie essenziali, soddisfacente ad un sistema di $(m + 1)$ equazioni differenziali alle derivate del primo ordine.

Dopo ciò, la risoluzione completa del problema richiede ancora l'integrazione di un sistema di m equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, derivante dalle condizioni di anolonomia.

* * *

Nonostante ciò, si presenta ancora la difficoltà rappresentata dal fatto che la determinazione della funzione che, per intenderci, chiameremo « funzione di Jacobi », dipende dalla risoluzione di un sistema di $m + 1$ equazioni differenziali alle derivate parziali, del primo ordine, ove m è il numero dei vincoli di mobilità anolonomi.

Agostinelli ⁽⁶²⁾ ha dato le condizioni sotto le quali l'integrazione delle equazioni canoniche del moto di un sistema materiale, la cui posizione in ogni istante, si possa individuare mediante n parametri lagrangiani, soggetto a forze conservative e sottoposto ad $m < n$ vincoli di mobilità anolonomi, si può fare dipendere dalla ricerca di un integrale, che si dirà ancora completo, di una determinata equazione differenziale del primo ordine, alle derivate parziali, contenente $(n - m)$ costanti arbitrarie essenziali; la quale equazione, in assenza di vincoli anolonomi, si riduce proprio alla ordinaria equazione di Jacobi dei sistemi olonomi. Determinate le condizioni di cui abbiamo detto, quando esse sono soddisfatte, un integrale completo della detta equazione alle derivate parziali fornisce $2(n - m)$ integrali delle equazioni canoniche del moto del sistema considerato, contenenti $2(n - m)$ costanti arbi-

⁽⁶²⁾ C. AGOSTINELLI, « Rendiconti della Accademia naz. dei Lincei », 1949, (Note I e II).

trarie. Dopo ciò, la risoluzione del problema viene ridotta alla integrazione di un sistema normale di m equazioni differenziali del primo ordine di m funzioni incognite del tempo, derivanti dalle m equazioni dei vincoli anolonomi. Questa ulteriore integrazione introduce altre m costanti arbitrarie, e in tutto, si hanno $(2n - m)$ costanti arbitrarie, tante quante ne involge, appunto, la soluzione generale del problema.

*
* *
*

Un'altra questione che presenta indubbio interesse è quella consistente nel proporsi di assegnare le condizioni affinché le equazioni del moto di un sistema materiale, la cui posizione, al solito, si possa individuare in ogni istante per mezzo di n parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$ e che sia soggetto, inoltre, ad m , ($m < n$) vincoli di mobilità anolonomi, ammettano un *integrale lineare nelle velocità lagrangiane* ⁽⁶³⁾.

Nel caso in cui le forze dipendano da un potenziale U , detta al solito

$$T = \frac{1}{2} \sum_{rs}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad (a_{rs} = a_{sr}, \quad q_0 = t, \quad \dot{q}_0 = 1),$$

l'energia cinetica del sistema, introdotte le $(n - m)$ caratteristiche cinetiche $\omega_1, \dots, \omega_{n-m}$ tali che si ha:

$$\begin{aligned} \dot{q}_r &= \sum_{i=0}^{n-m} \beta_{ri} \omega_i, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n) \quad ; \quad \beta_{00} = 1, \quad \beta_{0i} = 0, \\ &\quad (i = 1, \dots, n - m; \quad \dot{q}_0 = \omega_0 = 1), \\ \delta q_r &= \sum_{i=1}^{n-m} \beta_{ri} \delta \xi_i, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n \quad ; \quad \delta q_0 = 0, \quad \delta \xi_0 = 0), \end{aligned}$$

dove le ξ_i sono *quasi-coordinate nel senso di Whittaker*, posto:

$$\alpha_{ij} = \sum_{rs}^n a_{rs} \beta_{ri} \beta_{sj}, \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n - m),$$

⁽⁶³⁾ Vedi: C. AGOSTINELLI, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 80, 1944-45; A. PIGNEDOLI, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », 1946.

per cui l'energia cinetica assume la forma:

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_0^{n-m} \alpha_{ij} \omega_i \omega_j,$$

le equazioni del moto si riducono alla forma:

$$(8_5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \right) - \frac{\delta T^*}{\delta \xi_i} - \frac{\delta U}{\delta \xi_i} + \sum_0^{n-m} \gamma_{k,ij} \omega_i \omega_k = 0,$$

($i = 1, 2, \dots, n-m$)

con

$$\gamma_{k,ij} = -\gamma_{k,ji} = \sum_0^n a_{rs} \beta_{rk} \left(\frac{\delta \beta_{sj}}{\delta \xi_i} - \frac{\delta \beta_{si}}{\delta \xi_j} \right),$$

($k, i, j = 0, 1, \dots, n-m$).

Si possono effettivamente stabilire le condizioni affinché le equazioni del moto soprascritte ammettano un integrale dei momenti, per esempio l'integrale:

$$(9_5) \quad p_1 = \frac{\partial T^*}{\partial \omega_1} = \sum_0^{n-m} \alpha_{1j} \omega_j = \text{costante}.$$

Si deducono le condizioni:

$$(I) \quad \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \beta_{r1} \frac{\partial \alpha_{00}}{\partial q_r} - \gamma_{0,10} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_r} \beta_{r1} = 0,$$

$$(II) \quad \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \beta_{r1} \frac{\partial \alpha_{ii}}{\partial q_r} - \gamma_{i,1i} = 0,$$

($i = 1, 2, \dots, n-m$).

$$(III) \quad \sum_{r=1}^n \beta_{r1} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_r} - (\gamma_{i,1j} + \gamma_{j,1i}) = 0,$$

($i, j = 0, 1, 2, \dots, n-m; i \neq j$),

dove è chiaro il significato dei simboli.

Un caso particolare notevole si ha quando è

$$(10_5) \quad \beta_{r1} = 0, \quad \text{per } r = 2, 3, \dots, n.$$

In questo caso, facendo ancora

$$(10_5) \quad \beta_{11} = \text{cost}, \quad \frac{\partial \beta_{rj}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_1} = 0,$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \dots, v; \quad i \neq j; \quad r = 1, 2, \dots, n);$$

$$(11_5) \quad \frac{\partial a_{ii}}{\partial q_1} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n - m),$$

e che inoltre si abbia

$$(12_5) \quad U + \frac{1}{2} \alpha_{00} = \Phi(q_2, q_3, \dots, q_n, t),$$

con Φ simbolo di funzione arbitraria degli argomenti indicati fra parentesi, col che risulta che la coordinata q_1 deve essere ignorata, le condizioni I), II), III) sono tutte soddisfatte, e sussiste, pertanto, l'integrale dei momenti (9₅), il quale risulta:

$$(13_5) \quad \sum_{i=0}^{n-m} a_{1i} \omega_i \equiv \beta_{11} \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{r=0}^n a_{1r} \beta_{ri} \omega_i = \text{costante}.$$

Questo integrale si può esprimere anche per mezzo delle velocità lagrangiane, e risulta:

$$(14_5) \quad \beta_{11} \sum_{r=0}^n a_{1r} \dot{q}_r \equiv \beta_{11} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \text{costante},$$

cioè

$$(15_5) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \text{costante}.$$

Dunque il caso considerato conduce all'ordinario integrale dei momenti compatibile con l'ignorazione della coordinata q_1 .

* * *

E veniamo ad un altro problema di notevole importanza. La grande difficoltà che presenta il problema dell'integrazione delle equazioni del moto di un sistema anolonomo fa sentire, ancora più che per i sistemi olonomi, la necessità di ricercare

delle classi di soluzioni particolari, traendo partito dalla conoscenza di *integrali* o *relazioni invarianti* ⁽⁶⁴⁾.

Se si suppone di conoscere, delle equazioni del moto poste in forma canonica, un certo numero $l < n - m$ di integrali o di relazioni invarianti, fra loro *in involuzione* (si estende l'analoga definizione di integrali in involuzione di un sistema olonomo) si possono stabilire le condizioni per l'esistenza di un nuovo sistema di $2(n - m - l)$ relazioni invarianti per le equazioni canoniche, quelle che rendono stazionaria l'energia totale H del sistema.

In base all'esistenza di tali relazioni invarianti, viene dimostrata la possibilità di famiglie di soluzioni particolari delle equazioni del moto, le quali si ottengono integrando un sistema di $(l + m)$ equazioni normali del primo ordine, estendendo così ai sistemi anolonomi un ben noto teorema di *Levi-Civita* sui sistemi olonomi ⁽⁶⁵⁾.

Il risultato può essere applicato al caso particolare in cui, essendovi $(m + l)$ coordinate ignorabili, esistono, sotto ulteriori condizioni, l integrali dei momenti con le $2(n - m - l)$ relazioni invarianti che rendono stazionaria l'energia totale. In questo caso, vengono definite delle soluzioni particolari (*merostatiche*), dipendenti da $2l + m$ costanti arbitrarie, nelle quali restano costanti, oltre i momenti cinetici, $n - l$ coordinate lagrangiane, mentre le rimanenti l coordinate lagrangiane risultano funzioni lineari del tempo. Si hanno così dei movimenti analoghi a quelli alla *Routh* per i sistemi olonomi.

Ma veniamo a considerare le cose un po' più dettagliatamente, sia pure limitandoci ai capisaldi dei procedimenti e dei risultati. Scritte le equazioni del moto del sistemá ano-

⁽⁶⁴⁾ Cfr. A. PIGNEDOLI, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », 1946, già cit.

⁽⁶⁵⁾ T. LEVI-CIVITA, *Prac. matematyczno-fizycznych*, Warszawa, t. XXII, 1906; T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, p. II, cap. X, § 9, Zanichelli, Bologna 1927.

lonomo in questione sotto la forma:

$$(16_5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \right) - \frac{\delta(T^* + U)}{\delta \xi_i} - \sum_1^{n-m} \gamma_{h,ij} \omega_j \omega_h = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n - m),$$

se, in particolare, le caratteristiche cinetiche si fanno coincidere con $\nu = n - m$ delle velocità lagrangiane $\dot{q}$, per esempio $\omega_i = \dot{q}_{m+i}$, ($i = 1, 2, \dots, n - m$), le equazioni dei vincoli anonomi diventano:

$$(17_5) \quad \dot{q}_r = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_{ri} \dot{q}_{m+i}, \quad (r = 1, 2, \dots, m; \nu = n - m).$$

Ponendo ora, in generale:

$$p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} = \sum_1^{\nu} \alpha_{ij} \omega_j, \quad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

si ricava:

$$\omega_j = \sum_1^{\nu} \alpha^{ij} p_i,$$

dove α^{ij} è l'elemento reciproco del termine α_{ij} nel determinante di ordine $\nu = n - m$ relativo alla forma quadratica

$T^* = \frac{1}{2} \sum_1^{\nu} \alpha_{ij} \omega_i \omega_j$. Allora la T^* , espressa in termini dei momenti p_i , diventa:

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_1^{\nu} \alpha^{ij} p_i p_j.$$

Introducendo, poi, la funzione caratteristica:

$$H = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \omega_i - (T^* + U),$$

che risulta, tenuto conto del valore di p_i e del teorema di *Eulero* sulle funzioni omogenee:

$$H = T^* - U = \frac{1}{2} \sum_1^{\nu} \alpha^{ij} p_i p_j - U, \\ (\text{energia totale del sistema}),$$

alle equazioni del moto del sistema olonomo considerato (I6₅) si possono, in generale, sostituire le equazioni canoniche:

$$(I) \quad \omega_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},$$

$$(II) \quad \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \xi_i} + \sum_{h=1}^v \gamma_{h,ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial p_h} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

alle quali vanno aggiunte, al solito, le equazioni dei vincoli anolonomi.

Ora, affinchè le equazioni canoniche ammettano un integrale della forma:

$$(III) \quad f(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_v) = \text{costante},$$

dovremo avere:

$$(I8_5) \quad \sum_{r=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_r} \dot{q}_r + \sum_{i=1}^v \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = 0,$$

che si traduce nella condizione:

$$(I9_5) \quad \sum_{i=1}^v \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \right) - \\ - \sum_{h=1}^v \frac{\partial H}{\partial p_h} \sum_{i=1}^v \gamma_{h,ij} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0,$$

la quale, ricordando che è $\gamma_{h,ji} = -\gamma_{h,ij}$, si può anche scrivere:

$$(20_5) \quad \sum_{i=1}^v \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \right) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^v \frac{\partial H}{\partial p_h} \sum_{i=1}^v \gamma_{h,ij} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Questa, in particolare, è soddisfatta identicamente per $f = H$, e perciò, quando H non contiene esplicitamente il tempo (come abbiamo supposto), sussiste l'integrale dell'energia $H = \text{costante}$.

Se si suppone di conoscere, delle equazioni canoniche, $l(l < \nu)$ integrali

$$(IV) \quad fs(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_\nu) = c_s, \quad (s = 1, 2, \dots, l)$$

con le c_s costanti arbitrarie, le quali saranno nulle se si tratta di *relazioni invarianti*; se si suppone, ulteriormente, che le soprascritte equazioni siano risolubili rispetto ad l delle p , cioè che sia, per esempio:

$$(2I_5) \quad p_s = F_s(q_1, q_2, \dots, q_n; p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_\nu), \quad (s = 1, 2, \dots, l);$$

indicando con $K(q_1, q_2, \dots, q_n; p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_\nu)$, la forma che assume la funzione caratteristica H quando in luogo di $p_1, p_2, \dots, p_l$ si sostituiscono rispettivamente i valori $F_1, F_2, \dots, F_l$ definiti dalle soprascritte relazioni, si ottengono per K le equazioni:

$$(22_5) \quad \frac{\delta K}{\delta \xi_s} + \{K, F_s\} - \sum_{h=1}^{\nu} \frac{\partial H}{\partial p_h} \sum_{l+1}^{\nu} \gamma_{h,ls} \frac{\partial H}{\partial p_l} = 0, \\ (s = 1, 2, \dots, l),$$

dove è

$$(23_5) \quad \{K, F_s\} = \sum_{l+1}^{\nu} i \left(\frac{\delta F_s}{\delta \xi_l} \frac{\partial K}{\partial p_l} - \frac{\partial F_s}{\partial p_l} \frac{\delta K}{\delta \xi_l} \right) - \\ - \sum_{h=1}^{\nu} \frac{\partial H}{\partial p_h} \sum_{l+1}^{\nu} ij \gamma_{h,ij} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial p_j}$$

e risulta

$$\{K, F_s\} = - \{F_s, K\}.$$

Si trova che le relazioni

$$(24_5) \quad \frac{\partial K}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\delta K}{\delta \xi_s} = 0, \quad (s = l+1, \dots, \nu)$$

costituiscono pure relazioni invarianti per il sistema canonico considerato I), II) quando le derivate totali rispetto al tempo:

$$(25_5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial p_s} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta K}{\delta \xi_s} \right), \quad (s = l+1, \dots, \nu)$$

si potranno esprimere come funzioni lineari ed omogenee delle stesse $\frac{\partial K}{\partial p_s}$, $\frac{\partial K}{\partial \xi_s}$, ($s = l + 1, \dots, v$).

Le relazioni invarianti sopradette sono quelle che rendono stazionaria l'energia totale H del sistema subordinatamente all'esistenza degli integrali o relazioni invarianti $p_s = F_s$ ($s = 1, 2, \dots, l$) e per gli spostamenti virtuali che verificano le condizioni di anolonomia.

In definitiva, si hanno i seguenti risultati finali:

Le equazioni:

$$(26_5) \quad p_s - F_s = 0, \quad (s = 1, \dots, l); \quad \frac{\partial K}{\partial p_s} = 0, \quad (s = l + 1, \dots, v);$$

$$(27_5) \quad \frac{\partial K}{\partial \xi_s} = 0, \quad (s = l + 1, \dots, v)$$

vengono a costituire, in totale, un sistema di $l + 2(v - l) = 2v - l$ relazioni invarianti fra le $v + n$ quantità,

$$p_1, p_2, \dots, p_v; \quad q_1, q_2, \dots, q_{m+l}, q_{m+l+1}, \dots, q_{m+v}.$$

Esse permettono, allora di esprimere $2v - l$ di queste quantità per mezzo delle rimanenti $m + l$; permettono per esempio, di esprimere

$$p_1, p_2, \dots, p_v; \quad q_{m+l+1}, q_{m+l+2}, \dots, q_n$$

in funzione di

$$q_1, q_2, \dots, q_{m+l}.$$

Per la determinazione di queste ultime $(m + l)$ quantità, si hanno le equazioni canoniche:

$$(28_5) \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

e le m equazioni dei vincoli anolonomi:

$$(29_5) \quad \dot{q}_r = \sum_{i=1}^v \beta_{ri} \omega_i, \quad (r = 1, \dots, n)$$

La integrazione fornisce $q_1, q_2, \dots, q_{m+l}$ in funzione del tempo con $(m+l)$ costanti arbitrarie. Se le l relazioni $p_s - F_s = 0$ sono *integrali* del sistema canonico, nella soluzione che si ottiene figureranno ancora altre l costanti arbitrarie; si otterrà, cioè, una famiglia di ∞^{2l+m} soluzioni particolari. Da quanto precede, segue allora, il già preannunciato teorema, che estende l'analogo dovuto a *Levi-Civita* per i sistemi olonomi:

Se di un sistema materiale, con m vincoli anolonomi, le cui equazioni del moto siano ridotte a forma canonica, si conoscono l relazioni invarianti (ovvero l integrali) risolubili rispetto ad l dei momenti p_s e fra loro « in involuzione », se, inoltre, i vincoli di anolonomia sono tali per cui sono soddisfatte le condizioni

$$(30_5) \quad \sum_{p=1}^m \frac{\partial K}{\partial q_p} \lambda_{p,is} = 0,$$

$$\text{per } q = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, \nu; \quad s = l + 1, \dots, \nu;$$

con

$$\lambda_{p,is} = \sum_j^m \frac{\partial \beta_{p,s}}{\partial q_j} - \frac{\partial \beta_{p,i}}{\partial q_j} \beta_{js} + \frac{\partial \beta_{p,s}}{\partial q_{m+i}} - \frac{\partial \beta_{p,i}}{\partial q_{m+s}},$$

$$(q = 1, \dots, m; \quad i, s = 1, 2, \dots, \nu = n - m)$$

sussiste, in generale, una famiglia di ∞^{m+l} (ovvero ∞^{m+2l}) soluzioni particolari, che si ottengono integrando un sistema di $l + m$ equazioni normali del primo ordine.

In particolare, se si suppone che

$$q_1, q_2, \dots, q_m, q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_{m+l} \quad (l < \nu = n - m)$$

siano coordinate ignorabili e sia inoltre $\beta_{ri} = 0$, per $r = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, l$, le equazioni del moto porgono gli l integrali dei momenti:

$$(31_5) \quad p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_{m+i}} = p_i^{(0)} \text{ (costanti) }, \quad (i = 1, 2, \dots, l).$$

Nelle stesse ipotesi le *relazioni invarianti*:

$$(32_5) \quad \frac{\partial K}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \xi_s} = 0, \quad (s = l + 1, \dots, \nu)$$

definiscono

$$p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_\nu; \quad q_{m+l+1}, q_{m+l+2}, \dots, q_{m+\nu} \equiv q_n$$

come *quantità costanti* dipendenti da $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_l^{(0)}$.

Dopo ciò, le equazioni canoniche

$$(33_5) \quad \dot{q}_{m+i} \equiv \omega_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, l),$$

ove le $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) che dipendono dalle p e dalle q_{m+s} ($s = l + 1, \dots, \nu$) risultano, a sostituzione effettuata, delle costanti, forniscono le

$$q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_{m+\nu}$$

come funzioni lineari del tempo.

Infine le equazioni dei vincoli anolonomi, nelle ipotesi ammesse, si riducono alle seguenti:

$$(34_5) \quad \dot{q}_r = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_{ri} \dot{q}_{m+i}, \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

e, nel caso considerato, essendo $\dot{q}_{m+i} = 0$ per $i = l + 1, \dots, \nu$, si ha $\dot{q}_r = 0$ per $r = 1, 2, \dots, m$; si hanno cioè, anche per le $q_1, q_2, \dots, q_m$ valori costanti (arbitrari).

La soluzione particolare ottenuta è, pertanto, una soluzione che si può dire *merostatica*, dipendente da $2l + m$ costanti arbitrarie, e gli ∞^{2l+m} movimenti possibili che essa fornisce sono una estensione di quelli che, nel caso dei sistemi olonomi, vengono chiamati *moti alla Routh*.

* * *

Ricorderemo infine che Agostinelli ⁽⁶⁶⁾ ha dato nuova forma sintetica (vettoriale) alle equazioni del moto di un sistema

⁽⁶⁶⁾ C. AGOSTINELLI, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 1956.

anonomo con vincoli indipendenti dal tempo, riducendo la questione alla considerazione di un punto-immagine sulla corrispondente varietà metrica, stabilendo la connessione con un opportuno sistema olonomo, indagando circa l'esistenza, per le equazioni del moto, di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane e stabilendo le proprietà caratteristiche, geometrico-meccaniche, di tale integrale.

6. - SU ALCUNE RECENTI RICERCHE RIGUARDANTI IL MOTO DI UN CORPO RIGIDO CON UN PUNTO FISSO.

Il problema del moto di un solido con un punto fisso O dà luogo, come si sa, alla classica equazione differenziale vettoriale euleriana:

$$(I_6) \quad \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad \left(\dot{\mathbf{K}} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \right),$$

dove $\mathbf{M}$ è il momento risultante delle forze esterne, $\boldsymbol{\omega}(p, q, r)$ il vettore velocità angolare di rotazione, $\mathbf{K}(Ap, Bq, Cr)$ il vettore momento della quantità di moto, essendo gli assi (mobili col corpo) $Oxyz$ assi principali d'inerzia e, quindi, A, B, C i momenti principali d'inerzia del corpo in questione in moto attorno al punto fisso O .

La grande importanza dello studio del moto del sistema in questione anche in vista della vasta messe di applicazioni tecniche alle quali ha dato luogo, ha determinato una vera fioritura di ricerche, concretatesi in una vasta letteratura specialistica.

Certamente il caso più importante di sollecitazione sul corpo mobile è quello in cui la forza sollecitante sia la forza peso $+mg\boldsymbol{\chi}$ (m = massa, g = valore della accelerazione di gravità e $\boldsymbol{\chi}$ = versore della verticale discendente) applicata nel baricentro $G(x, y, z)$. Allora si ha $\mathbf{M} = (G - O) \wedge mg\boldsymbol{\chi}$, e l'equazione differenziale vettoriale (I_6) assume la forma:

$$(2_6) \quad \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = mg(G - O) \wedge \boldsymbol{\chi}$$

dove $\dot{\mathbf{K}}$ è la derivata temporale di $\mathbf{K}$ relativa agli assi mobili.

Alla (26) va associata l'equazione vettoriale di Poisson:

$$(36) \quad \frac{d\chi}{dt} = \chi \wedge \omega.$$

Moltiplicando scalarmente la (26) per ω e per χ , rispettivamente e tenendo conto della (36) si hanno i due integrali primi, dell'energia:

$$(46) \quad T - mg(G - O) \times \chi = h, \quad (\text{costante})$$

e del momento scalare della quantità di moto:

$$(56) \quad K \times \chi = K_0 (\text{costante}),$$

dove $T = \frac{1}{2} \omega \times K$ è l'energia cinetica del sistema.

Si ha poi, il terzo integrale:

$$(66) \quad \chi \times \chi = \chi^2 = 1.$$

Le equazioni differenziali vettoriali (26) e (36) equivalgono al sistema delle sei equazioni differenziali scalari seguenti:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\dot{p} + (C - B)qr = mg(\chi_3 y_0 - \chi_2 z_0), \\ B\dot{q} + (A - C)r\dot{p} = mg(\chi_1 z_0 - \chi_3 x_0), \\ C\dot{r} + (C - A)pq = mg(\chi_2 x_0 - \chi_1 y_0); \\ \frac{d\chi_1}{dt} = \chi_2 r - \chi_3 q, \\ \frac{d\chi_2}{dt} = \chi_3 p - \chi_1 r, \\ \frac{d\chi_3}{dt} = \chi_1 q - \chi_2 p. \end{array} \right.$$

Ora, è ben noto che il problema del moto di un corpo rigido pesante con un punto fisso può essere ridotto a quadrature se è possibile trovare un quarto integrale primo accanto ai tre citati. Prima di venire a tale questione, ricordiamo alcune altre ricerche.

Sbrana ⁽⁶⁷⁾ ha fatto vedere che le equazioni di Eulero e Poisson possono essere sostituite con equazioni contenenti soltanto le componenti p , q ed r del vettore velocità angolare ω e non i coseni direttori.

Bottema e *Beth* ⁽⁶⁸⁾ hanno dedotto, in uno spazio ad n dimensioni, un sistema di $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni che generalizzano quelle di Eulero ed hanno studiato i moti stazionari per $n = 4$, supponendo che non vi siano forze oltre le reazioni nel punto fisso O .

Ma, venendo al problema della ricerca di un ulteriore integrale primo, oltre ai tre — diremo — classici, ricorderemo una ricerca di *Stankevich* ⁽⁶⁹⁾ il quale partì dall'equazione alle derivate parziali di Jacobi e usò trasformazioni di contatto per la ricerca, appunto, di tale quarto integrale.

Anche i tre casi classici di integrabilità hanno dato luogo a notevoli ricerche. *Grammel* ⁽⁷⁰⁾ ha studiato il caso di Eulero-Poinsot allo scopo di ottenere formule atte al calcolo numerico. Il moto « alla Poinsot » è una generalizzazione della precessione regolare di un corpo simmetrico in assenza di forze esterne. Nel caso simmetrico, il moto alla Poinsot può essere rappresentato come sovrapposizione di una rotazione intorno all'asse di figura e di una rotazione intorno all'asse di precessione. Nel caso di un corpo asimmetrico, le due rotazioni non sono uniformi, ma oscillano intorno a certi valori medi. I periodi di tali oscillazioni sono uguali al periodo delle oscillazioni dell'angolo di Eulero θ . *Grammel* procede decomponendo la rotazione propria Φ e la rotazione precessionale Ψ del moto alla Poinsot nei loro valori medi e nelle loro oscillazioni intorno a tali valori.

⁽⁶⁷⁾ Cfr. F. SBRANA, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1934.

⁽⁶⁸⁾ O. BOTTEMA-H. J. E. BETH, « Koninkl. Nederland Akad. Wetenschap, Proc. », 1951.

⁽⁶⁹⁾ Cfr. I. V. STANKEVICH, « Trudy Moskov. Stanko-Instrum. Inst. », 1937.

⁽⁷⁰⁾ Cfr. R. GRAMMEL, « Ingenieur Archiv », 1950.

Per quanto riguarda il celebre caso, considerato indipendentemente da *Lagrange* (1788) e da *Poisson* (1815) ed in cui si ha $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, cioè in cui due momenti principali d'inerzia sono uguali ed il baricentro si trova sul terzo asse d'inerzia, dopo le ben note ricerche di *Jacobi* (1849) e di *Somov* (1856), *Chrapan* ⁽⁷¹⁾ ha fatto vedere che le equazioni del moto possono essere integrate rispetto al tempo con l'ausilio delle funzioni ellittiche, qualora la posizione del corpo sia individuata, al solito, mediante gli angoli di *Eulero*. La stabilità della rotazione nel caso di *Lagrange* è stata, invece, studiata, col metodo di *Lyapunov*, da *Chetaev* ⁽⁷²⁾.

È stato studiato in Italia ⁽⁷³⁾ il caso in cui il punto fisso non coincida col baricentro, ma sia prossimo ad esso, caso, quindi, di movimento prossimo al moto alla *Eulero-Poinsot*.

Il problema è ridotto allo studio di due sistemi di equazioni alle variazioni.

Invero si parte dall'osservazione che, se x_0, y_0, z_0 sono degli infinitesimi, lo sono pure le componenti del momento M_x, M_y ed M_z . Detta allora, $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ la soluzione delle equazioni di *Eulero*, quando il baricentro coincide col punto fisso (moto alla *Poinsot*), indicando con ξ, η, ζ le rispettive variazioni per il passaggio alla considerazione del moto in questione, si scriverà:

$$(86) \quad p = \bar{p} + \xi, \quad q = \bar{q} + \eta, \quad r = \bar{r} + \zeta;$$

sicchè, dopo aver sostituito nelle tre prime delle (74), trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo in ξ, η, ζ e tenendo conto del fatto che si ha

$$(96) \quad A\dot{\bar{p}} + (C - B)\bar{q}\bar{r} = 0, \quad B\dot{\bar{q}} + (A - C)\bar{r}\bar{p} = 0, \\ C\dot{\bar{r}} + (B - A)\bar{p}\bar{q} = 0,$$

⁽⁷¹⁾ Cfr. J. CHRAPAN, « Mat. Fyz. Sborn. Slovensk? Akad. Vied Umeni », 1952.

⁽⁷²⁾ Cfr. N. G. CHETAEV, « Prikl. Mat. Mekh. », 1954.

⁽⁷³⁾ Cfr. A. PIGNEDOLI, « Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena », 1945.

si ottengono le equazioni alle variazioni:

$$(10_6) \quad \begin{cases} A\dot{\xi} + (C - B)(\bar{q}\zeta + \bar{r}\eta) = mg(y_0\bar{\chi}_3 - z_0\bar{\chi}_2), \\ B\dot{\eta} + (A - C)(\bar{r}\xi + \bar{p}\zeta) = mg(z_0\bar{\chi}_1 - x_0\bar{\chi}_3), \\ C\dot{\zeta} + (B - A)(\bar{p}\eta + \bar{q}\xi) = mg(x_0\bar{\chi}_2 - y_0\bar{\chi}_1), \end{cases}$$

dove $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_3$ sono i valori dei coseni direttori χ_1, χ_2, χ_3 della verticale discendente nel moto approssimato alla Poincot. Essi debbono soddisfare alle equazioni differenziali:

$$(11_6) \quad \frac{d\bar{\chi}_1}{dt} = \bar{\chi}_2\bar{r} - \bar{\chi}_3\bar{q}, \quad \frac{d\bar{\chi}_2}{dt} = \bar{\chi}_3\bar{p} - \bar{\chi}_1\bar{r}, \quad \frac{d\bar{\chi}_3}{dt} = \bar{\chi}_1\bar{q} - \bar{\chi}_2\bar{p}.$$

Ponendo poi

$$(12_6) \quad \chi_1 = \bar{\chi}_1 + \varepsilon_1, \quad \chi_2 = \bar{\chi}_2 + \varepsilon_2, \quad \chi_3 = \bar{\chi}_3 + \varepsilon_3$$

trascurando i termini di ordine superiore al primo in $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, si ottengono le equazioni alle variazioni:

$$(13_6) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \bar{\chi}_2\zeta - \bar{\chi}_3\eta + \varepsilon_2\bar{r} - \varepsilon_3\bar{q}, \\ \dot{\varepsilon}_2 = \bar{\chi}_3\xi - \bar{\chi}_1\zeta + \varepsilon_3\bar{p} - \varepsilon_1\bar{r}, \\ \dot{\varepsilon}_3 = \bar{\chi}_1\eta - \bar{\chi}_2\xi + \varepsilon_1\bar{q} - \varepsilon_2\bar{p}. \end{cases}$$

Una volta ricavate ξ, η, ζ dalle equazioni (10₆) (che sono le equazioni alle variazioni delle equazioni di Eulero), le altre tre equazioni alle variazioni (13₆) forniscono $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 .

Viene condotto uno studio accurato delle equazioni alle variazioni, con particolare riguardo al caso in cui il momento della quantità di moto $\mathbf{K}_0$ sia diretto verticalmente verso l'alto e considerando, in tale caso, le possibili soluzioni delle equazioni alle variazioni delle equazioni di Eulero, in cui ξ, η, ζ siano funzioni lineari in $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$.

Nello stesso lavoro viene anche considerato il caso in cui siano x_0 ed y_0 infinitesime, z_0 finita e sia infinitesima la differenza $A - B = \varepsilon A$.

Tale caso si può considerare, cioè, come variato rispetto al caso classico di Lagrange per due ragioni; la prima consi-

stente nel fatto che il baricentro non coincide col punto fisso ed è poco distante dall'asse z ; la seconda consistente nel fatto che la struttura del corpo rigido considerato è prossima alla struttura giroscopica. Questo problema viene ridotto anch'esso allo studio di equazioni alle variazioni, e viene discussa la stabilità di alcuni moti particolari, quasi stazionari.

Notoriamente il problema consistente nel domandarsi di trovare tutti i casi in cui la soluzione generale del sistema (76) è esprimibile in termini di funzioni meromorfe di t (t variabile complessa) fu risolto dalla *Kovalevskaya* (1888), la quale fece vedere che, oltre il caso $A = B = C$ ed oltre il caso di Eulero-Poinsot ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$) e il caso di Lagrange e Poisson ($A = B$, $x_0 = y_0 = 0$) solo un altro caso restava in cui ciò è possibile, e cioè quello in cui sia $A = B = 2C$, $z_0 = 0$. Come si sa, le ricerche della *Kovalevskaya* furono seguite da lavori di *Lyapunov* e di *Appel'rot*, nonché dalla segnalazione del caso di *Hess* ed *Appel'rot*, in cui se $A > B > C$, si ha $y_0 = 0$, $x_0^2 A(B - C) - z_0 C(A - B) = 0$ e le equazioni di Eulero ammettono l'integrale particolarizzato $Apx_0 + Crz_0 = 0$.

Ma vi era un altro problema: quello di trovare tutti i casi in cui il sistema (76) possiede un quarto integrale, algebrico in p, q, r .

Dopo le ricerche ben note di *Poincaré* e di *Husson* in materia, citeremo *Burgatti*, il quale fece vedere che se l'ellissoide d'inerzia è di rivoluzione, un quarto integrale algebrico esiste solo nei casi di *Eulero-Poinsot*, *Lagrange-Poisson* e della *Kovalevskaya*.

* * *

Una vasta letteratura concerne poi i casi di *Staupe*, *Steklov* e *Bobylev*, *Goryachev* e *Chapligin*, *Mercalov*, *Kowalewsky*, *Corliss* e altri (74).

(74) Per una versione sintetica e comparativa di tali casi, con ampi riferimenti bibliografici, il lettore può utilmente consultare: E. LEIMANIS, *Some recent advances in the Dynamics of rigid bodies and celestial Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1958.

Noi, nell'intento di segnalare, soprattutto, quanto fatto recentemente dalla Scuola italiana, richiameremo brevemente l'attenzione sulle ricerche riguardanti il caso in cui il baricentro del sistema appartenga all'asse di una sezione circolare dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso. Ricorderemo, anzitutto il notevole lavoro di *Grioli* ⁽⁷⁵⁾, il quale, alla ricerca di precessioni regolari non degeneri fra i possibili moti del corpo pesante asimmetrico dotato di un punto fisso, ha ottenuto una soluzione particolare contenente una sola costante arbitraria e che presenta notevole interesse in quanto i movimenti corrispondenti del corpo allo studio sono rotazioni uniformi intorno all'asse baricentrico, il quale, a sua volta, ruota uniformemente e con la stessa velocità attorno all'asse di precessione, che è perpendicolare all'asse baricentrico. Va notato che le condizioni iniziali del moto determinano da sole queste precessioni purchè *O* sia stato opportunamente scelto. Va ricordato inoltre che l'asse di precessione è inclinato di un determinato angolo alla verticale discendente.

Il *Grioli* ha anche studiato la stabilità lineare dei movimenti in parola e si è anche occupato del moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla ⁽⁷⁶⁾.

Colombo ⁽⁷⁷⁾ ha ottenuto l'espressione generale del momento che deve sollecitare un giroscopio perchè siano possibili precessioni regolari o rotazioni uniformi intorno ad assi differenti dall'asse giroscopico (moti merostatici).

Agostinelli ⁽⁷⁸⁾, indaga sul caso di *Grioli* e si domanda se, nelle condizioni indicate per la posizione del baricentro, esistano altri movimenti del corpo rigido pesante asimmetrico

⁽⁷⁵⁾ G. GRIOLI, « Annali di Matematica pura ed applicata », 1947; ID., « Annali della Scuola normale superiore di Pisa », 1947 e 1949.

⁽⁷⁶⁾ G. GRIOLI, « Rendiconti di Matem. e appl. », Università di Roma e Istituto nazionale di Alta matematica, 1947.

⁽⁷⁷⁾ G. COLOMBO, « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », 1951.

⁽⁷⁸⁾ C. AGOSTINELLI, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », 1947.

con un punto fisso O . Scritte le equazioni euleriane del moto con riferimento ad una opportuna terna $O(xyz)$ di assi solidali, con Oz coincidente con l'asse di uno dei piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia, a cui appartiene il baricentro, l'Agostinelli si propone di vedere se esistano delle soluzioni delle equazioni del moto nelle quali p^2 ed r^2 siano dei polinomi di una opportuna combinazione lineare delle componenti p ed r della velocità angolare secondo Ox ed Oz rispettivamente.

L'analisi di Agostinelli fa vedere che l'unica soluzione di tale tipo è quella in cui la componente r della velocità angolare (secondo l'asse baricentrico) è costante, ed è inoltre $q^2 = r^2 - p^2$. Vi saranno soluzioni di tipo diverso? L'analisi viene fatta da Agostinelli per soluzioni delle equazioni di Eulero-Poisson in cui le componenti della velocità angolare e i coseni direttori della verticale discendente rispetto alla terna solidale siano funzioni uniformi e meromorfe del tempo, con sole singolarità polari nell'origine, e tale analisi conduce a due soluzioni soltanto di tale tipo. La prima, che conduce a quadrature ellittiche, corrisponde ad un movimento di rotazione, non uniforme, intorno all'asse principale d'inerzia intermedio relativo al punto O , asse che si mantiene orizzontale e fisso nello spazio. Il movimento in parola dipende da tre costanti arbitrarie.

La seconda soluzione conduce ad un moto di precessione, ed è, però, molto più riposta.

Per quanto riguarda la stabilità del movimento caratterizzato da Grioli, *Agostinelli* ⁽⁷⁹⁾ conclude per la non stabilità se non quando i momenti d'inerzia del solido soddisfano a certe particolari condizioni.

Zeuli ⁽⁸⁰⁾ si è occupato dei movimenti di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso O nell'ipotesi che la strut-

⁽⁷⁹⁾ C. AGOSTINELLI, « Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 1948-49.

⁽⁸⁰⁾ T. ZEULI, « Rendiconti del Seminario di matematica dell'Università e Politecnico di Torino », 1950.

tura del corpo sia molto prossima a quella di un corpo simmetrico.

La ricerca di Zeuli è condotta sviluppando le funzioni incognite $p, q, r, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ in serie di potenze di un parametro, essendo i coefficienti delle funzioni del tempo.

*
* *
*

Altre notevoli ricerche sono state eseguite relativamente al caso in cui il baricentro si trovi su uno dei piani principali d'inerzia del corpo, relativi al punto fisso O .

Manacorda ⁽⁸¹⁾ stabilisce due relazioni invarianti in funzione delle componenti della velocità angolare, come serie di potenze in una certa combinazione lineare di tali componenti. La teoria di Manacorda generalizza, sostanzialmente, i casi di Hess, Kowalewski e Grioli.

Nadile ⁽⁸²⁾ trova due tipi di rotazioni uniformi, nonché altri movimenti che comportano solo quadrature e l'integrazione di una equazione differenziale del tipo di Riccati.

C'è poi un vasto gruppo di ricerche concernenti il problema del moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso sotto l'azione di forze diverse dal peso. Tali ricerche sono state condotte da Goryachev, Tallqvist, Koshlyakov, Braunbeck ⁽⁸³⁾, ed, in Italia, da Udeschini, De Simoni, Arrighi, Alfieri ⁽⁸⁴⁾.

⁽⁸¹⁾ T. MANACORDA, « Rendiconti della Accademia nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 1949; Id., « Rivista di Matematica dell'Università di Parma », 1950; Id., « Ricerca Scientifica », 1950.

⁽⁸²⁾ A. NADILE, *Esercitazioni matematiche*, Circolo matematico di Catania, 1950.

⁽⁸³⁾ D. N. GORYACHEV, « Varshav. Univ. Izvest. », 1915; H. TALLQVIST, « Acta Soc. Sci. Fennicae », 1926; V. N. KOSHLIAKOV, « Prikl. Mat. Mekh. », 1953; W. BRAUNBECK, « Z.A.M.M. », 1953.

⁽⁸⁴⁾ P. UDESCHINI, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1942; F. DE SIMONI, « Annali della Scuola normale superiore di Pisa », 1942; G. ARRIGHI, « Atti della Accademia nazionale dei Lincei », Memorie della Classe di Scienze matematiche e naturali, 1947; L. ALFIERI, « Rendiconti di Matem. e appl. », Roma 1954.

Oggi, poi, in connessione con le tecniche di propulsione a getto, ha assunto profondo significato fisico e grande importanza pratica il problema del moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso soggetto a forze di momento avente direzione fissa nel corpo. Importanti ricerche su questo problema sono state pubblicate da Grammel ⁽⁸⁵⁾ il quale si è occupato, appunto, del giroscopio « autoeccitato » e dei suoi moti stazionari, nonché delle relative questioni di stabilità.

Fra i punti di vista moderni relativi al problema del moto di un corpo rigido con un punto fisso non possiamo, infine, non segnalare quello relativo allo *spazio delle configurazioni*, per cui il moto del corpo rigido in questione può essere interpretato come moto di un punto (Θ, Ψ, Φ) in uno spazio tridimensionale ⁽⁸⁶⁾. Introducendo in luogo degli angoli di Eulero Θ, Ψ, Φ quattro « parametri cayleyani » $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ legati dalla relazione

$$(146) \quad \sum_{i=1}^4 \xi_i^2 = 1,$$

ed interpretando i parametri cayleyani stessi come coordinate cartesiane di un punto in uno spazio euclideo a quattro dimensioni E_4 , l'equazione (146) rappresenta una ipersfera in tale spazio E_4 .

Così lo spazio delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso è *omeomorfo* ad una ipersfera di E_4 , i punti diametralmente opposti della quale sono considerati coincidenti; cioè *lo spazio delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso è omeomorfo ad uno spazio proiettivo tridimensionale*.

La varietà metrica riemanniana definita da

$$(156) \quad ds^2 = 2Tdt^2$$

⁽⁸⁵⁾ R. GRAMMEL, « Ingenieur Archiv », 1953; ID., « Ingenieur Archiv », 1954.

⁽⁸⁶⁾ E. LEIMANIS, *loc. cit.*, p. 30.

dove T è l'energia cinetica del corpo studiato, varietà che si può introdurre nello spazio delle configurazioni, si chiama uno *spazio euleriano*. *Vagner* ⁽⁸⁷⁾ ha assegnato le condizioni perchè uno spazio riemanniano tridimensionale sia uno spazio euleriano e perchè uno spazio riemanniano tridimensionale di dato tensore metrico possa essere rappresentato conformemente su uno spazio euleriano, differente da uno spazio di curvatura costante.

Vagner stesso ha studiato il moto di un corpo rigido intorno ad un punto concidente col baricentro ed il moto del quale è soggetto a vincoli anolonomi.

Ricerche sulla *varietà delle configurazioni e del tempo* sono, poi, state compiute oltre che da *Finsler*, *Synge*, *Dirac*, *Cartan*, da *Lichnerowicz* e *Rund* ⁽⁸⁸⁾.

Ringrazio dal profondo la gloriosa Accademia delle Scienze di Torino per l'alto, onorifico invito a tenere questa relazione sullo sviluppo della Meccanica analitica, nel Simposio di celebrazione del 150° anniversario della morte del fondatore della Meccanica analitica stessa, *G. L. Lagrange*.

La mia gratitudine viene dal cuore di uno che si sente umile e devoto allievo della Scuola matematica torinese.

Istituto matematico dell'Università di Bologna.

⁽⁸⁷⁾ V. V. VAGNER, « Uchen. Zap. Saratov. Gos. Univ. im Chernenyshevskogo Sez. Fiz. Mat. Inst. », 1938; ID., « Trudy Sem. Vektar », Tenz. Anal., 1941.

⁽⁸⁸⁾ A. LICHNEROWICZ, « Ann. Sci. École normale supérieure », 1945; H. RUND, « Archiv. Math. », 1952; ID., « Mathematische Nachrichten », 1954.

Il problema dei tre corpi dall'epoca di Lagrange ai giorni nostri.

Riassunto. — *Si dà una esposizione sintetica dei risultati più salienti conseguiti nello studio del problema dei tre corpi dall'epoca di Lagrange ai giorni nostri, soffermandosi sulle questioni che riguardano la riduzione delle equazioni del moto e la loro regolarizzazione, sulla risoluzione analitica di Sundman, sul problema ristretto dei tre corpi e le ricerche di Hill, e infine sull'opera di Poincaré relativa alle soluzioni periodiche del problema.*

INTRODUZIONE.

I. — Il problema del moto di tre punti materiali che si attraggono mutuamente con la legge di Newton, problema detto *dei tre corpi*, d'importanza capitale per l'Astronomia, attrasse l'attenzione dei matematici, subito dopo la scoperta da parte dello stesso Newton della legge della gravitazione universale.

Il problema dei tre corpi, il più celebre di tutta la dinamica per le immense difficoltà che presenta la sua risoluzione, è stato oggetto di lunghe e faticose ricerche da parte dei più sommi matematici ed astronomi a cominciare da Clairaut fino a quelli dei nostri giorni, e la sua storia è sì può dire quella dei metodi della Meccanica e dell'Astronomia moderna ed anche dell'Analisi.

Dopo più di due secoli di studio e migliaia di lavori pubblicati sull'argomento, sebbene i meravigliosi e profondi risultati di Poincaré abbiano portato tanta luce su questo classico

problema, e il Sundman ne abbia assegnata la risoluzione analitica generale, e le moderne macchine elettroniche consentano di calcolare le traiettorie e di stabilire a lunga scadenza e con l'approssimazione che si desidera la mutua posizione dei tre corpi, tuttavia resta ancora aperto ai matematici un largo campo di investigazione.

PRIME RICERCHE. MEMORIA DI LAGRANGE.

2. — Non farò la storia del problema dei tre corpi, che da sola richiederebbe diverse ore di esposizione ⁽¹⁾. Dirò solo che lo studio qualitativo del problema dei tre corpi fu iniziato già dallo stesso Newton nei suoi immortali *Principi* e proseguito poi, quando i metodi del calcolo differenziale erano già affinati, da Clairaut, D'Alembert ed Eulero, che trattarono con profondità ed eleganza la teoria della Luna, stabilirono le equazioni del moto dei tre corpi ed assegnarono i loro integrali primi. Anzi ad Eulero spetta il merito di avere scoperto la prima e la più semplice delle soluzioni periodiche del problema, quella cioè in cui i tre corpi si muovono mantenendosi sempre allineati, tale che due di essi conservano costante il rapporto delle distanze dal terzo e descrivono intorno a questo due coniche con fuoco nel medesimo.

Ma il primo lavoro che segna un passo veramente fecondo verso la risoluzione del problema è la celebre memoria di Lagrange, *Essai sur le problème des trois corps* ⁽²⁾, premiata dall'Accademia di Parigi nel 1772.

In essa fu raggiunto il massimo sforzo consentito dall'analisi per quanto riguarda la risoluzione rigorosa del problema e a questa memoria si sono ispirati i numerosi ricercatori, che

(1) Cfr. R. MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi*, Hoepli, Milano, 1919. Cfr. anche A. GAUTIER, *Essai historique sur le problème des trois corps*, Paris, 1817. E. T. WHITTAKER, *Report on the progress of the solution of the problem of three bodies*, Brit. Ass. Rep. 1899, pp. 121-160.

(2) *Oeuvres Complètes*, t. 6^o, pp. 229-324.

hanno semplificato alcuni particolari, o data veste più simmetrica alla trattazione. A proposito di essa il Radau disse che *è da ritenere che più di un geometra andrà ad attingere a questa sorgente profonda.*

Lagrange mostra che la risoluzione completa del problema si può ottenere determinando innanzi tutto i lati del triangolo formato dai tre corpi, e in ciò consiste la parte più originale del lavoro. Dopo ciò le coordinate dei tre corpi nello spazio si possono ottenere con quadrature.

Volendo accennare brevemente all'impostazione analitica del problema, osserviamo che se P_0, P_1, P_2 sono i tre corpi puntiformi, m_0, m_1, m_2 le rispettive masse; $r_0 = P_1P_2, r_1 = P_2P_0, r_2 = P_0P_1$ le loro mutue distanze e si indica con

$$(1) \quad U = f \left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2} \right)$$

il potenziale delle forze di mutua attrazione, dove f è la costante di attrazione universale, le equazioni del moto assoluto dei tre corpi sono

$$(2) \quad m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \text{grad}_{P_i} U \quad (i = 0, 1, 2)$$

Queste equivalgono a nove equazioni differenziali scalari del 2° ordine in cui sono funzioni incognite del tempo le nove coordinate dei tre punti e sono equivalenti ad un sistema canonico di 18° ordine. La risoluzione completa del problema richiede pertanto la conoscenza di 18 integrali indipendenti delle equazioni del moto, mentre, come si sa, se ne conoscono soltanto 10 e cioè: i sei integrali del moto del baricentro, l'integrale delle forze vive e i tre integrali delle aree. All'infuori di questi il problema dei tre corpi, come ha dimostrato il Bruns ⁽³⁾, non ammette altri integrali algebrici nelle velocità.

(3) E. H. BRUNS, *Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems*, Berichte der Kgl Sächsischen Ges. der Wiss. 1887, pp. 1-39, 55-82. « Acta Mathem. », t. II, 1887, pp. 25-96.

Poincaré ha dimostrato inoltre che non solo non esistono altri integrali algebrici nelle velocità, ma che non esistono neanche altri integrali uniformi (4). Questo teorema, che in un certo senso è più generale di quello di Bruns, è dimostrato però per valori sufficientemente piccoli delle masse, mentre quello di Bruns è dimostrato per masse generiche.

Questi risultati dimostrano che un'integrazione completa e rigorosa delle equazioni del moto dei tre corpi non è possibile se non ricorrendo a procedimenti di approssimazione mediante sviluppi in serie.

Dalle equazioni del moto relativo dei tre corpi, che si deducono facilmente dalle (2), Lagrange, con un procedimento veramente ingegnoso, ricava la seguente notevolissima equazione

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2} \right) = \frac{M}{m_0 m_1 m_2} U - K$$

dove M è la somma delle masse dei tre corpi e K è la costante dell'energia. Essa contiene soltanto le distanze dei tre corpi e la sua importanza si è tanto maggiormente rivelata dopo le conseguenze che molto utilmente il Sundman ne ha saputo trarre nelle sue ricerche, combinandola con un'altra relazione che egli ricava dall'integrale delle forze vive.

Successivamente Lagrange, servendosi di una funzione ausiliaria, che poi riesce ad eliminare, e utilizzando gli integrali delle aree, ottiene altre due equazioni, una del 3° ordine e l'altra del 2° ordine, che non contengono altro che le distanze r_0 , r_1 , r_2 . Aggiungendo queste due equazioni alla (2) si ha un sistema di tre equazioni differenziali, una del 3° ordine e le altre due del 2° ordine, che sono quelle che definiscono le mutue distanze dei tre corpi.

Questo sistema differenziale, complessivamente del 7° ordine, non contiene esplicitamente il tempo ed è perciò riducibile al 6° ordine. Si può perciò affermare come sostanzialmente

(4) H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. I, Cap. V, Paris, Gauthier-Villars, 1892.

dovuta a Lagrange la massima riduzione ottenibile nell'ordine del sistema di equazioni differenziali del movimento dei tre corpi dal 18° al 6°. Questa massima riduzione non sarà più superata dai successori ai quali spetta solo il merito di aver affinato il metodo di ricerca per giungere più rapidamente e in modo esplicito alla detta riduzione. Essa, come si sa, fu successivamente conseguita molto elegantemente da Jacobi col noto procedimento della *eliminazione dei nodi* (5).

In una seconda parte della sua memoria Lagrange considera i casi in cui le distanze dei tre corpi, oppure i loro rapporti, si mantengono costanti per tutta la durata del moto. Ritrova in tal modo il caso di Eulero dei tre corpi allineati e scopre un'altra soluzione periodica del nostro problema, quella in cui i tre corpi sono sempre vertici di un triangolo equilatero e si muovono in un piano descrivendo ciascuno una conica con fuoco nel comune centro di massa. In particolare, se le mutue distanze sono costanti, si ha un triangolo equilatero uniformemente rotante nel suo piano intorno al baricentro dei tre corpi.

A questa soluzione, che Lagrange considerava *una pura curiosità*, ha conferito singolare importanza, dopo più di un secolo, la scoperta dei quattro pianetini costituenti il gruppo troiano, i quali oscillano intorno a due centri di librazione che con il Sole e Giove formano approssimativamente due configurazioni triangolari equilateri.

Anzi, pare che l'astronomo polacco Kordylewski, avendo intuito che la Terra doveva avere un altro satellite, che con la Luna formasse un triangolo equilatero, dopo alcuni anni di indefesse e pazienti osservazioni, sia riuscito, nell'aprile del 1961, a fotografare questo ignorato satellite, composto di due corpi distinti e ravvicinati, di dimensioni limitate, forse formati di ammassi meteorici, e posto, con la Terra e la Luna, al terzo vertice di un triangolo equilatero.

(5) JACOBI, *Sur l'élimination des noeds dans le problème des trois corps*, « Comp. Rend. », t. 15°, pp. 235-255, 1842; « Journal für Math. », Bd. 26, pp. 115-131, 1843; « Gesamm. Werke », Bd. 4, pp. 295-314.

È opportuno ricordare che il caso del triangolo equilatero, ruotante uniformemente nel suo piano intorno al centro di massa, e quello dei tre corpi allineati, furono ricavati da Levi-Civita ⁽⁶⁾ col metodo delle soluzioni stazionarie di un sistema canonico, soluzioni cioè che rendono stazionarie la energia totale del sistema e che siano compatibili con l'esistenza di una relazione invariante o di un altro integrale (nel caso specifico l'integrale del momento scalare della quantità di moto o delle aree).

Questa soluzione triangolare equilatera è altresì importante dal punto di vista cosmogonico, poichè essa si presenta come meta asintotica nel moto dei tre corpi puntiformi la cui energia, per cause dissipative diverse, va lentamente degradando verso un valore minimo, secondo un'idea che risale a Lord Kelvin e che molto felicemente è stata utilizzata da Giulio Krall in diversi suoi studi di moti a meta asintotica.

Partendo da questo stesso concetto, in una memoria di questa Accademia del 1941 ⁽⁷⁾, io dimostrai che se i tre corpi sono estesi e rotanti, e a struttura giroscopica, esiste una soluzione stazionaria nella quale i tre baricentri sono disposti ai vertici di un triangolo, in generale non equilatero.

Questo triangolo diventa equilatero quando, per ciascuno dei tre corpi, la differenza fra il quadrato del raggio d'inerzia rispetto all'asse giroscopico e il quadrato del raggio d'inerzia rispetto a un asse equatoriale, ha lo stesso valore. Se più in particolare i tre corpi hanno simmetria sferica intorno al proprio baricentro, quelle tre differenze sono nulle e si ha la soluzione triangolare equilatera di Lagrange. Nel caso in cui i tre corpi hanno struttura qualsiasi (non giroscopica) le uniche soluzioni

⁽⁷⁾ C. AGOSTINELLI, *Sul moto asintotico degli $n + 1$ corpi*, « Mem. della R. Accademia delle Scienze di Torino », Serie 2^a, Tomo 70^o, P. I, 1941.

⁽⁸⁾ T. LEVI-CIVITA, *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires*, « Prau Matematyczne-Fizyczne », t. 17^o, pp. 1-40, Warszawa, 1906.

stazionarie asintotiche sono quelle in cui i baricentri sono allineati, ed uno degli assi equatoriali d'inerzia di ciascun corpo è disposto secondo la retta dei baricentri.

RIDUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.

3. — Ho già detto come una delle questioni più importanti relative al problema dei tre corpi è quella della riduzione dal 18° al 6° ordine.

Essa fu ottenuta da Jacobi riferendo i tre corpi a una terna di assi cartesiani ortogonali ($X Y Z$), con l'origine in uno dei tre corpi, P_0 , assunto come corpo centrale, con l'asse Z diretto parallelamente e nel verso del vettore costante del momento della quantità di moto, e quindi col piano XY parallelo al piano invariabile.

Dando allora alle equazioni del moto forma canonica, con opportuna scelta delle variabili si ha un immediato abbassamento dal 18° al 12° ordine derivante dall'aver implicitamente utilizzati i sei integrali del moto del baricentro dei tre corpi.

In questo sistema di equazioni canoniche la funzione caratteristica risulta indipendente dalla longitudine della linea nodale. In base a questa circostanza, e tenendo conto degli integrali delle aree, si ottiene la riduzione ad un nuovo sistema canonico dell'ottavo ordine in otto funzioni incognite, in cui la nuova funzione caratteristica H , trasformata della precedente, non contiene esplicitamente il tempo. Esiste pertanto l'integrale $H = \text{cost.}$ e coi noti procedimenti della Meccanica Analitica, l'ordine del sistema canonico si abbassa ancora di due unità eliminando il tempo. Si ottiene così la riduzione al 6° ordine, che è la massima raggiungibile, in una forma molto semplice ed espressiva.

Una riduzione analoga fu effettuata da Levi-Civita ⁽⁸⁾ fissando ancora con due angoli la posizione del piano dei tre

⁽⁸⁾ T. LEVI-CIVITA, *Sulla riduzione del problema dei tre corpi*, « Atti del R. Istituto Veneto », t. 74°, pp. 907-939, 1914-15.

corpi rispetto al piano invariabile e la posizione di due dei tre corpi rispetto al terzo nel loro piano con quattro coordinate cartesiane. Ottenne così un sistema differenziale dell'ottavo ordine già stabilito da Whittaker ⁽⁹⁾ valendosi di successive trasformazioni di contatto.

Diversi altri autori, da Jacobi in poi, hanno effettuato, con metodi più o meno semplici e diretti, la riduzione accennata, senza alterare la forma canonica delle equazioni del moto. Fra queste va menzionata soprattutto quella di Poincaré, che assume come variabili gli elementi ellittici delle orbite istantanee nel moto relativo di due dei tre corpi rispetto al terzo ⁽¹⁰⁾.

URTI E REGOLARIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO. RICERCHE DI SUNDMAN.

4. — Riconosciuta l'impossibilità di risolvere rigorosamente il problema dei tre corpi, gli sforzi dei matematici furono rivolti in seguito alla risoluzione approssimata mediante sviluppi in serie, e i primi tentativi in questo senso risalgono a Clairaut, D'Alembert, Eulero. Ma il metodo degli sviluppi in serie acquista maggiore rigore e importanza soprattutto con Laplace e Lagrange che fondano la *teoria delle perturbazioni*. Si arriva quindi ad esprimere formalmente le coordinate dei tre corpi come serie di funzioni trigonometriche di più argomenti, a loro volta funzioni lineari del tempo e in questo campo vanno soprattutto segnalate le ricerche di Newcomb, Lindstedt, Gylden, Tisserand e Bohlin.

In tutti questi lavori non viene però affatto considerata la convergenza di quelle serie. Anzi, Poincaré nella grande memoria che meritò il premio del Re Oscar II di Svezia del 21 gennaio 1889, e pubblicata poi negli *Acta Mathematica* ⁽¹¹⁾,

⁽⁹⁾ E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1^a ediz. 1904, 3^a ediz. 1927.

⁽¹⁰⁾ H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles*, vol. I, Chap. I.

⁽¹¹⁾ H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*, « *Acta Mathem.* », t. 13^o, pp. 1-278, 1890.

ha fatto vedere che la maggior parte delle serie adoperate in Meccanica Celeste, e in particolare quelle di Lindstedt, che sono le più semplici, non sono convergenti. Purtuttavia quelle serie conservano tutto il loro valore pratico poichè i termini di esse decrescono rapidamente e poi crescono; arrestandosi perciò ai primi termini, innanzi che questi abbiano cessato di decrescere, quelle serie hanno reso, e sono destinate a rendere ancora utili servizi all'Astronomia; ma esse si oppongono alle previsioni a lunga scadenza.

La difficoltà di rappresentare tutti gli elementi del moto, coordinate e velocità dei tre corpi, mediante serie valide per ogni valore del tempo, risiede nel fatto che le equazioni differenziali del moto, in una qualunque delle forme classiche, come provengono dall'applicazione della legge newtoniana di attrazione, contengono dei termini con a denominatore le distanze dei tre corpi. Esse si comportano perciò sempre regolarmente finchè le posizioni dei tre corpi sono distinte, ma presentano singolarità quando due o tutti e tre i corpi tendono ad urtarsi.

In questo caso si è cercato di girare la difficoltà trasformando il sistema di equazioni differenziali che reggono il movimento in un altro che sia esente da singolarità, considerando le coordinate, le velocità e il tempo come funzioni di una opportuna variabile ausiliaria. In ciò consiste il *problema della regolarizzazione* delle equazioni del moto.

Lo studio analitico del comportamento del sistema nell'immediata prossimità di un urto fu iniziato da Painlevé⁽¹²⁾, il quale dimostrò rigorosamente che se col tendere del tempo t a un certo istante t_1 il moto non si mantiene regolare, nel senso

(12) P. PAINLEVÉ, *Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps*, « Comp. rend. », t. 123^o, pp. 871-873, 1896.

Idem, *Sur les cas du problème des trois corps (et des n corps) où deux des corps se chaquent au bout d'un temps fini*, *ibid.*, t. 125^o, pp. 1075-1081, 1897.

Idem, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, professées à Stockholm, Paris, Hermann, 1897.

che le incognite cessano di essere funzioni regolari del tempo, ciò avviene soltanto quando *una sola* delle mutue distanze tende a zero, mentre le altre due convergono verso un valore finito, oppure tutte e tre hanno per limite zero. Nel primo caso si ha un *urto binario*, nel secondo la *collisione generale*.

Painlevé fu ancora indotto a ritenere che la possibilità di un urto binario per un valore finito t_1 del tempo implica, nel caso generale due relazioni uniformi fra le coordinate e le componenti della velocità all'istante iniziale, mentre nel caso particolare del *problema piano* si avrebbe una sola condizione. Questa questione fu studiata da Levi-Civita ⁽¹³⁾ nel caso più semplice del *problema ristretto*. Esso consiste, come è ben noto, in un caso particolare del problema piano, in cui uno dei tre corpi, diciamo P_2 , ha massa infinitamente piccola, sicchè non influisce sul moto degli altri due P_0 , P_1 . Si suppone allora che P_0 e P_1 si muovano nel modo più semplice compatibile con la legge di Newton e cioè ruotino uniformemente intorno al loro baricentro, mentre P_2 si muove nel piano in cui avviene la rotazione di P_0 , P_1 , sotto l'azione di questi due centri mobili.

In questo caso manifestamente può avvenire soltanto un urto binario di P_2 con P_0 , oppure con P_1 , e Levi-Civita arrivò effettivamente a costruire, sotto forma esplicita, la condizione di urto che è unica e uniforme, come aveva previsto Painlevé.

L'analisi degli urti binari nel problema generale dei tre corpi fu ripresa poco dopo, su analoghi principi, dal Bisconcini ⁽¹⁴⁾ che pervenne ad esplicitare due relazioni uniformi caratteristiche dell'urto, confermando le previsioni di Painlevé. Queste condizioni però, espresse per mezzo di serie, sono molto complicate e non sono direttamente applicabili se non quando l'intervallo di tempo che intercede fra l'istante iniziale e l'istante t_1 dell'urto è sufficientemente corto.

⁽¹³⁾ T. LEVI-CIVITA, *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Annali di Matematica », serie III, t. IX, pp. 1-32, 1903.

⁽¹⁴⁾ G. BISCONCINI, *Sur le problème des trois corps*, « Acta Mathem. », t. 30°, 1906, pp. 49-92.

Ma queste ed altre ricerche furono superate dai lavori di Sundman che si conclusero nella famosa memoria degli *Acta Mathematica* ⁽¹⁵⁾, che ottenne nel 1913 il premio Pontecoulant dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Al Sundman spetta soprattutto il vanto di avere per il primo regolarizzato in modo completo il problema dei tre corpi. Egli cominciò ad esaminare l'eventualità di una collisione generale e dimostrò che se le costanti delle aree non sono tutte e tre nulle, se cioè non è nullo il momento risultante $\vec{C}$ della quantità di moto dei tre corpi, si può assegnare un limite positivo l al disotto del quale non discendono mai le due più grandi distanze fra i corpi.

Se dunque le condizioni iniziali sono tali da rendere non nullo il vettore costante $\vec{C}$ del momento della quantità di moto, è senz'altro da escludere la possibilità di una collisione generale. Pertanto le sole singolarità locali di cui va tenuto conto sono i tre possibili tipi di urti binari. È questo il risultato più brillante delle ricerche di Sundman, sebbene pare che Weierstrass avesse già riconosciuta la portata essenziale della condizione $C \neq 0$ nello studio analitico del problema dei tre corpi ⁽¹⁶⁾. Comunque la proposizione fu dimostrata da Sundman che ne seppe trarre partito sistematico fino ad arrivare al teorema conclusivo.

Secondo esso se le costanti delle aree nel movimento dei tre corpi rispetto al loro comune baricentro non sono tutte nulle, si può scegliere la variabile indipendente in modo tale che le equazioni differenziali del moto siano regolari anche quando due dei tre corpi tendono ad urtarsi. È così possibile ottenere un effettivo prolungamento del moto dopo una collisione. Purtuttavia, per quanto notevole l'importanza del passo compiuto da Sundman, occorre dire che la via che egli ha seguito

⁽¹⁵⁾ K. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps*, « *Acta Mathem.* », t. 36°, pp. 105-179, 1912.

⁽¹⁶⁾ MITTAG-LEFFLER, *Zur Biographie von Weierstrass*, « *Acta Mathem.* », t. 35°, pp. 29-35, 1912.

è indiretta e richiede un numero piuttosto grande di variabili ausiliarie; inoltre le serie a cui perviene rappresentano è vero la soluzione analitica del problema, ma non mettono in luce nè l'andamento generale, nè le caratteristiche salienti del movimento, fino al punto che se in un certo istante avviene un urto, le formule non ce lo dicono senza una ulteriore discussione, restando esse valide anche al di là di un urto.

A questo riguardo ci si può domandare col Levi-Civita: quale interesse può avere per l'Astronomia la continuazione analitica del moto dopo un urto se si pensa agli effetti catastrofici di una collisione fra due corpi celesti? Se essi vanno in frantumi il problema del moto dopo l'urto presenta caratteristiche ben diverse da quelle schematizzate nel problema dei tre corpi puntiformi. La continuazione analitica in tal caso nulla potrà rispecchiare della realtà.

Si può pensare però che le conseguenze catastrofiche di un urto rimangano localizzate nella regione in cui i corpi celesti vengono a collidere, ma che l'effetto generale sia un rimbalzo come avviene pei corpi perfettamente elastici. In tal caso ha senso fisico perfettamente determinato la continuazione analitica del moto dopo l'urto. Infatti, l'Armellini⁽¹⁷⁾ ha rilevato che nel caso di sferette elastiche al moto dei loro centri si può estendere la soluzione di Sundman.

IL PROBLEMA RISTRETTO DEI TRE CORPI.

5. — Un caso particolare del problema dei tre corpi che ha avuto un posto preminente in ricerche recenti, specialmente per opera di Poincaré, è il cosiddetto problema ristretto dei tre corpi, di cui ho già fatto cenno e che si ha quando una delle masse è infinitamente piccola in confronto delle altre due e tale da non influire sul movimento di queste ultime.

(17) G. ARMELLINI, *Estensione della soluzione di Sundman dal caso di corpi ideali al caso di sferette omogenee*, « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei », Vol. XXIV, I sem. 1913, pp. 185-190.

Esso si presenta p. es. nel problema del moto di un piccolo pianeta (pianetoide o asteroide) attratto dal Sole e da Giove, quando si trascura l'inclinazione e l'eccentricità dell'orbita di Giove rispetto al Sole, come pure nella teoria della Luna, osservando che la massa della Luna è molto piccola perchè possa alterare il moto relativo della Terra intorno al Sole. In questo caso, detto P il pianetoide e P_0 , P_1 gli altri due corpi, rispettivamente di massa m_0 , m_1 , è compatibile un moto circolare uniforme di P_1 intorno a P_0 alla distanza r con velocità angolare n definita dalla relazione

$$n^2 = f(m_0 + m_1)/r^3$$

dove f è al solito la costante di attrazione universale.

Supposto poi che P si muova nel piano in cui si muove

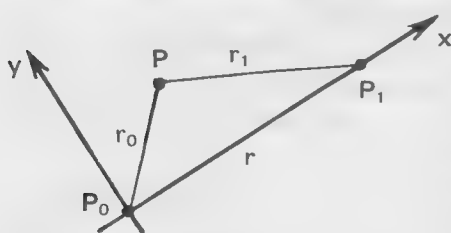


Fig. 1.

P_1 , con riferimento ad una coppia di assi ortogonali (xy) con l'origine in P_0 , l'asse x coincidente con la retta P_0P_1 e uniformemente rotante intorno a P_0 , con velocità angolare n , dette x ,

y le coordinate di P secondo questi assi, le equazioni cartesiane del moto di P risultano

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned}$$

dove è

$$(4) \quad \Omega = f \left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{f}{r^3} (m_0 r_0^2 + m_1 r_1^2)$$

ed

$$(5) \quad r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad r_1 = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}$$

Queste equazioni ammettono il cosiddetto *integrale di Jacobi*

$$(6) \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \Omega - \frac{1}{2} C$$

con C costante arbitraria, il quale non è altro che l'integrale dell'energia e che ha un ufficio fondamentale in tutta la discussione di questo caso del problema dei tre corpi.

In questo indirizzo vi sono importanti e rigorose ricerche di Levi-Civita, di Birkhoff, Darwin e altri.

RICERCHE DI HILL.

6. — In realtà questi studi sono venuti dopo le celebri ricerche di Hill sul movimento della Luna, che, sebbene riguardano un caso alquanto più particolare del problema ristretto, hanno aperto un'era nuova per lo studio dei problemi della Meccanica Celeste.

In esse egli trascura, oltre l'eccentricità e l'inclinazione del Sole, anche la parallasse solare e perviene ad equazioni molto semplici per il moto della Luna, che gli permettono di trattare, con originalità di vedute e profondità di indagine, l'ineguaglianza della *variazione* relativa della longitudine lunare e quella del *moto del perigeo*.

Queste equazioni risultano

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} + \mu \frac{x}{r^3} - 3n'^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} + \mu \frac{y}{r^3} &= 0 \end{aligned}$$

dove si è ora indicato con n' il moto medio del Sole, si è posto $\mu = fm_0$ ed $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è ora la distanza della Luna dalla Terra. Esse ammettono l'integrale (di Jacobi)

$$(8) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 3n'^2 x^2 - C,$$

importante per lo studio delle curve di velocità nulla, definite dall'equazione

$$\frac{2\mu}{r} + 3n'^2x^2 - C = 0.$$

Mentre l'integrale generale di quelle equazioni involge quattro costanti arbitrarie, le soluzioni considerate da Hill ne contengono solo due. Egli mostra che in queste soluzioni le coordinate del satellite possono essere rappresentate con serie convergenti della forma

$$x = A_0 \cos \nu(t - t_0) + A_1 \cos 3\nu(t - t_0) + A_2 \cos 5\nu(t - t_0) + \dots$$

(9)

$$y = B_0 \sin \nu(t - t_0) + B_1 \sin 3\nu(t - t_0) + B_2 \sin 5\nu(t - t_0) + \dots$$

ove t_0 è l'istante in cui il corpo interseca l'asse x , e $\frac{2\pi}{\nu}$ è la durata di una rivoluzione completa del satellite intorno all'origine. Si possono considerare ν e t_0 come costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione e allora i coefficienti A_i , B_i , si determinano in funzione di μ , n' , ν .

Il tempo non mi concede neanche di accennare ai brillanti risultati conseguiti da Hill, ma ricorderò solo come in quelle sue ricerche fu arditamente condotto a quella celebre equazione ottenuta eguagliando a zero un determinante di ordine infinito, la cui convergenza fu poi dimostrata da Poincaré.

UN CASO PIÙ GENERALE DI QUELLO DI HILL.

7. — Un caso del problema ristretto dei tre corpi, più generale di quello di Hill, è stato recentemente da me studiato in alcuni lavori (18).

(18) C. AGOSTINELLI, *Sopra un caso del problema ristretto dei tre corpi più generale di quello di Hill*, « Bollettino della Un. Mat. Ital. », dicembre 1953.

(Segue nota)

Con riferimento ad una terna di assi ortogonali (xyz) con l'origine in P_0 (Terra), l'asse x coincidente con la retta

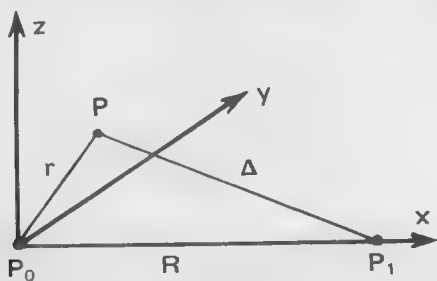


Fig. 2.

P_0P_1 , orientata da P_0 verso P_1 (Sole), le equazioni da me considerate sono

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (10)$$

dove è

$$U = f \left(\frac{m_0}{r} + \frac{m_1}{\Delta} - \frac{m_1 x}{R^2} \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} r^2 = \overline{P_0P^2} &= x^2 + y^2 + z^2, \quad R = P_0P_1, \quad \Delta^2 = \overline{P_1P^2} = \\ &= R^2 + r^2 - 2Rx \end{aligned} \quad (12)$$

e

$$n^2 = f(m_0 + m_1) / R^3. \quad (13)$$

IDEM, *Sull'esistenza di soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi*, « Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino », vol. 88, 1953-54.

IDEM, *Su una soluzione periodica del problema ristretto dei tre corpi più generale di quello di Hill*, « Rendiconti del Seminario Matematico. Università e Politecnico di Torino », vol. 13^o, 1953-54.

Poichè nel moto dei satelliti il rapporto r/R è molto piccolo in confronto dell'unità, $\frac{1}{\Delta}$ si può rappresentare mediante una serie di potenze, uniformemente convergente del rapporto r/R . Allora, a meno di una costante additiva inessenziale, risulta

$$(14) \quad U = \frac{fm_0}{r} + \frac{fm_I}{R} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} X_k\left(\frac{x}{r}\right)$$

essendo X_k il k^{mo} polinomio di Legendre.

Se si ritengono trascurabili i termini di ordine superiore al primo nella inclinazione $z/\sqrt{x^2 + y^2}$, e si pone $n_I^2 = fm_I/R^3$, le equazioni (10) diventano

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x + fm_0 \frac{x}{r^3} - \\ - n_I^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left[k \frac{r^{k-2}}{R^{k-2}} x X_k\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{r^{k-3}}{R^{k-2}} y^2 X_k'\left(\frac{x}{r}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (15) \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y + fm_0 \frac{y}{r^3} - \\ - n_I^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left[k \frac{r^{k-2}}{R^{k-2}} y X_k\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{r^{k-3}}{R^{k-2}} xy X_k'\left(\frac{x}{r}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\ddot{z} + fm_0 \frac{z}{r^3} - n_I^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left[k \frac{r^{k-2}}{R^{k-2}} \dot{X}_k\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{r^{k-3}}{R^{k-2}} x X_k'\left(\frac{x}{r}\right) \right] \cdot z = 0,$$

dove è ora $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. In questo caso le prime due delle equazioni (15) definiscono le coordinate xy del satellite P in funzione del tempo, e determinate mediante la loro integrazione queste incognite, la terza risulta una equazione differenziale del 2° ordine, lineare, nella sola incognita z .

Quest'ultima equazione è soddisfatta per $z = 0$, perciò se si prescinde dall'inclinazione dell'orbita del satellite P sul piano del moto relativo di P_I rispetto a P_0 , non si hanno da considerare

che le sole prime due equazioni, le quali ammettono l'integrale (di Jacobi)

$$(16) \quad \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) - \\ - f \frac{m_0}{r} - n_1^2 R \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} X_k \left(\frac{x}{r} \right) = \text{costante}.$$

Se ci si limita a considerare soltanto il primo termine di ciascuna delle serie che in esse compaiono, ciò che equivale a trascurare la parallasse solare, e si fa inoltre $n = n_1$, si trascura cioè la massa del pianeta in confronto di quella del Sole, si hanno proprio le equazioni di Hill. Casi più generali di quelli di Hill si otterranno considerando ulteriori termini di quelle serie, con che si viene a tener conto anche della parallasse solare.

Arrestandoci ai primi due termini abbiamo le equazioni

$$(17) \quad \ddot{x} - 2n\dot{y} + f m_0 \frac{x}{r^3} - (n^2 + 2n_1^2)x - \frac{3n_1^2}{2R} (2x^2 - y^2) = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} + f m_0 \frac{y}{r^3} - (n^2 - n_1^2)y + \frac{3n_1^2}{R} xy = 0$$

Ponendo

$$(18) \quad \Omega = \frac{f m_0}{r} + \frac{1}{2} (n^2 - n_1^2) (x^2 + y^2) + \\ + \frac{3}{2} n_1^2 x^2 + \frac{n_1^2}{R} \left(x^3 - \frac{3}{2} xy^2 \right)$$

esse si possono scrivere molto semplicemente

$$(19) \quad \ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

e l'integrale di Jacobi di queste equazioni risulta

$$(20) \quad \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega + C = 0, \quad (C = \text{cost.}).$$

Le equazioni (17), come del resto le equazioni (15), sotto certe condizioni ammettono, in base a noti teoremi di Poincaré, infinite soluzioni periodiche. Sono state determinate in modo esplicito le condizioni per l'esistenza di queste soluzioni periodiche, è stata quindi costruita una soluzione periodica del sistema (17), più generale di quella di Hill, e messe in evidenza diverse proprietà notevoli delle traiettorie periodiche.

CENNI SULLE RICERCHE DI POINCARÉ.

8. — Accennerò ora brevemente all'opera grandiosa di H. Poincaré, che è il vero fondatore della teoria delle soluzioni periodiche delle equazioni della Dinamica e che ha dato un nuovo e meraviglioso impulso a tutti i problemi della Meccanica Celeste.

I suoi studi sul problema dei tre corpi, pubblicati inizialmente nelle linee generali nella memoria di Stoccolma, furono sviluppati ed estesi nei tre classici volumi « *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique celeste* ».

Questi studi sono soprattutto rivolti alla ricerca delle soluzioni periodiche nel problema ristretto, di cui conosciamo già i lineamenti.

Egli sceglie le unità di misura in modo che la costante di attrazione sia uguale ad 1 e la somma della massa del pianeta P_0 e del Sole P_1 sia pure uguale ad 1. Indica quindi con μ la massa del pianeta ed $1 - \mu$ quella del Sole, assume per unità di lunghezza la loro distanza, riferisce il moto del satellite P al baricentro O dei due corpi P_0, P_1 , fa sì ancora che la velocità angolare di rotazione di P_0 e P_1 intorno ad O sia unitaria, e definisce la posizione di P rispetto ad O mediante gli elementi ellittici osculatori. Essendo allora a il semiasse maggiore ed e l'eccentricità dell'orbita ellittica osculatrice, pone

$$(2I) \quad x_1 = L \equiv \sqrt{a}, \quad x_2 = G \equiv \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad y_1 = l, \quad y_2 = g - t$$

$$F = F_0 + R, \quad F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2$$

dove l è l'anomalia media, g la longitudine del perielio e R la funzione perturbatrice.

Per $\mu = 0$, si ha $F = F_0$, e per μ non nullo la funzione caratteristica F risulta sviluppabile in serie di potenze di μ della forma

$$(22) \quad F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

Inoltre F è funzione soltanto di x_1, x_2, y_1, y_2 , ed è periodica di periodo 2π rispetto ad y_1 ed y_2 . Le equazioni differenziali del moto assumono la forma canonica

$$(23) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2)$$

e ammette l'integrale $F = \text{costante}$.

Con criteri analoghi Poincaré imposta il problema del movimento dei tre corpi nel caso generale, quando però due delle tre masse sono rappresentabili sotto la forma $a_2\mu, a_3\mu$, con μ parametro molto piccolo.

Dopo aver rilevato che per $\mu = 0$ il problema è integrabile e si ha una infinità di soluzioni periodiche, dimostra che per μ sufficientemente piccolo il problema dei tre corpi comporta ancora una infinità di soluzioni periodiche.

Distingue allora tre specie di soluzioni periodiche: per quelle della prima specie le inclinazioni sono nulle, i tre corpi cioè si muovono in un piano e le eccentricità sono molto piccole. Queste soluzioni contengono in particolare quella di Hill. Per le soluzioni periodiche di 2ª specie le inclinazioni sono nulle e eccentricità finite. Infine per quelle di 3ª specie le inclinazioni non sono nulle. In merito alle soluzioni periodiche Poincaré osserva come può sembrare che queste soluzioni non abbiano alcun interesse pratico, poichè la probabilità affinchè le condizioni iniziali del movimento siano proprio quelle che corrispondono a un moto periodico, è addirittura nulla. Ma può avvenire che ne differiscano di poco.

Si può allora assumere la soluzione periodica come prima approssimazione o come *orbita intermediaria*, secondo il lin-

guaggio di Gylden, e passare quindi alla ricerca delle soluzioni prossime ad essa.

Inoltre, se nel movimento di un astro si presenta una ineguaglianza considerevole e il movimento vero di quest'astro differisce poco da quello di un astro ideale la cui orbita corrisponde a una soluzione periodica, avverrà spesso che detta ineguaglianza avrà lo stesso coefficiente per l'astro reale e per quello ideale. Ma questo coefficiente si potrà calcolare più facilmente per l'astro ideale il cui movimento è più semplice e l'orbita è periodica. E noi troviamo l'applicazione di questo principio proprio nella teoria della Luna di Hill.

Poincaré studia successivamente il passaggio da una soluzione periodica a una soluzione poco differente, scrive le *equazioni alle variazioni*, fonda la teoria degli *esponenti caratteristici* e stabilisce i criteri affinchè una data soluzione periodica sia *stabile o instabile*.

Partendo da una soluzione periodica instabile Poincaré considera poi due specie di soluzioni particolari notevoli, che egli chiama *soluzioni asintotiche*.

Una prima specie di soluzioni asintotiche è fornita da serie che sono convergenti per valori del tempo sufficientemente grandi, e quando t cresce indefinitamente le soluzioni da esse rappresentate si avvicinano indefinitamente alla soluzione periodica considerata.

Le soluzioni asintotiche di 2^a specie sono invece rappresentate da serie che convergono per t negativo e in valore assoluto sufficientemente grande, e per $t \rightarrow -\infty$ queste soluzioni si avvicinano asintoticamente alla soluzione periodica.

Esiste poi una infinità di soluzioni dette *doppiamente asintotiche*, composte con serie dei due tipi accennati.

Le considerazioni relative alle serie asintotiche e doppiamente asintotiche hanno permesso a Poincaré di stabilire che le serie abituali della Meccanica celeste, e in particolare quelle di Lindstedt, non sono convergenti. Sorvolando ora sulle altre questioni trattate da Poincaré, quali la stabilità, la non esistenza di altri integrali uniformi, ecc., per cui ha fondato nuove

teorie, come quella degli invarianti integrali, chiuderò questa rapida rassegna accennando ad una questione relativa al problema dei tre corpi che si è presentata ultimamente.

In una nota comparsa nei *Comptes Rendus* del 29 gennaio 1962, M. Jean Meffroy ⁽¹⁹⁾ ha considerato l'eventualità di un nuovo caso particolare del problema dei tre corpi in cui il piano dei tre corpi dovrebbe descrivere un cono di rotazione intorno

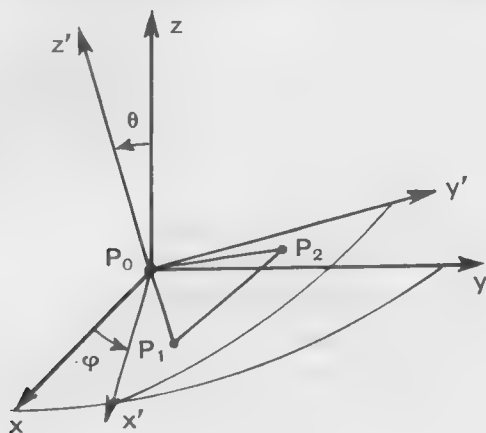


Fig. 3.

ad un asse di direzione invariabile col vertice in uno di essi, assunto come corpo centrale. Egli riduce la questione alla risoluzione di una equazione differenziale del 3° ordine rispetto ad una variabile angolare, in realtà molto complicata, e dice che se la sua integrazione è possibile si ha una nuova soluzione particolare del problema dei tre corpi.

Ora la questione è stata da me esaminata a fondo ed ho dimostrato che questa nuova soluzione non può esistere, se si eccettua il caso già noto in cui il piano dei tre corpi è invariabile.

Invero, se si indica con θ l'angolo che la normale al piano dei tre corpi forma con l'asse del detto cono (P_0z), affinché

(19) M. JEAN MEFFROY, *Sur un nouveau cas particulier du problème des trois corps*, « *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* », t. 254, pp. 818-820, 29 janvier 1962.

esista una soluzione del tipo accennato dovrà essere per tutta la durata del moto $\theta = \theta_0$ (costante). Ma se in un opportuno riferimento p_θ è la variabile coniugata di θ ed H è la funzione hamiltoniana del problema, dall'equazione canonica corrispondente

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}$$

segue che per tutta la durata del moto l'espressione $\frac{\partial H}{\partial p_\theta}$ dovrà risultare nulla, se lo è inizialmente. Cioè questa espressione dovrà essere *invariante*, nel senso di Levi-Civita, rispetto al sistema di equazioni differenziali del moto.

L'analisi da me effettuata dimostra che questo non può avvenire se non quando il piano dei tre corpi è invariabile. Passando quindi a considerare in questo piano le soluzioni che rendono stazionaria l'energia totale H , compatibilmente con l'esistenza dell'integrale del momento della quantità di moto, si ricade sempre nella soluzione triangolare equilatera di Lagrange e in quella di Eulero dei tre corpi allineati.

La teoria delle oscillazioni da Lagrange ai nostri giorni.

Riassunto. — *Si espongono sinteticamente alcune proprietà delle oscillazioni lineari e non-lineari che si presentano in diversi campi della fisica e nella biologia.*

1. — Il titolo di questa conferenza, è, senza dubbio, troppo ambizioso; una esposizione, sia pure parziale, degli sviluppi che, in questi ultimi centocinquanta anni, ha avuto la teoria delle oscillazioni richiederebbe non un'ora, ma almeno le 50-60 lezioni di uno dei nostri corsi universitari. Dovrò limitarmi perciò a ricordare, per sommi capi, alcuni problemi della teoria delle oscillazioni, in particolare le oscillazioni non-lineari che ancora sembrano d'interesse ai teorici e ai tecnici. Mi limiterò inoltre alle oscillazioni dei sistemi con numero finito di gradi di libertà, anzi nel caso non-lineare, a sistemi con un grado di libertà.

2. — Ovviamente cominceremo con accennare ai contributi sulla teoria delle oscillazioni inseriti nella « Mécanique analytique » ⁽¹⁾. Nella parte seconda, sez. 6, par. 1 Lagrange tratta in modo completo la teoria dei piccoli movimenti di un sistema ad n gradi di libertà intorno ad una posizione di equili-

⁽¹⁾ Mi riferisco all'edizione pubblicata a cura di G. Darboux (Gauthier Villars, Paris, 1888) corrispondente alla II edizione della « Mécanique analytique » pubblicata vivente Lagrange.

brio stabile, cioè i moti sotto l'azione di forze elastiche ⁽²⁾. Dopo aver ricavato le equazioni lineari che reggono il moto Egli dimostra il teorema fondamentale per cui ogni coordinata del sistema può esprimersi, in generale, mediante la somma di n moti armonici con frequenza, ampiezza e fase iniziale diversi. Le frequenze sono determinate da un'equazione algebrica in cui compaiono solo i coefficienti delle equazioni differenziali che reggono il moto; in altre parole le frequenze dipendono solo dai coefficienti dell'energia cinetica e potenziale, ma sono indipendenti dalle condizioni iniziali. Invece dalle condizioni iniziali dipendono essenzialmente le ampiezze e le fasi; anzi queste grandezze possono, al variare delle condizioni iniziali, assumere qualunque valore reale (e positivo per le ampiezze) ⁽³⁾. Inoltre per questi moti vale il principio di conservazione dell'energia che Lagrange chiama principio di conservazione delle forze vive.

In un paragrafo successivo Egli studia il moto di una corda tesa caricata da n masse uguali e, passando al limite per n tendente all'infinito, ottiene le formule per la vibrazione di una corda; ma, come ho detto, non posso intrattenermi sulle oscillazioni a un numero infinito di gradi di libertà.

Nella parte seconda, sez. VIII, par. 1 Lagrange tratta del moto di un pendolo che, con il nostro linguaggio, diremmo conico o sferico, e, in particolare, il moto del pendolo semplice, moto che Egli studia, in sostanza, con i procedimenti esposti nei nostri corsi di meccanica. Egli infatti si vale di due integrali primi: l'integrale delle aree e l'integrale d'energia. Inoltre considera anche il caso in cui sul pendolo agiscono forze resistenti

⁽²⁾ Com'è noto si definiscono forze elastiche le forze che derivano da un potenziale funzione quadratica definita negativa degli spostamenti dalla condizione d'equilibrio. Esse sono perciò funzioni lineari degli spostamenti e, nel caso di un sistema a un grado di libertà, proporzionali e di verso opposto agli spostamenti stessi.

⁽³⁾ Dal punto di vista fisico è bene però notare che le ampiezze non possono, in generale, superare certi valori, altrimenti non sono più valide le ipotesi che conducono alle equazioni dei piccoli movimenti.

che, forse seguendo le idee di Newton, suppone proporzionali al quadrato della velocità.

In conclusione, Lagrange tratta sia di oscillazioni lineari (cioè rette da equazioni differenziali lineari) sia di oscillazioni non-lineari. Però, salvo il caso del sistema con resistenza a cui si è accennato poco fa, Egli si limita a considerare sistemi per cui vale il teorema di conservazione dell'energia, teorema che, come ha dimostrato Wejerstrass, è sufficiente per descrivere, nelle linee essenziali, le oscillazioni dei sistemi conservativi a un grado di libertà.

3. — Spostiamoci ora di circa un secolo dalla prima edizione della «*Mécanique analytique*» (1788) e prendiamo in considerazione un altro classico libro scientifico: «*The theory of Sound*» di Lord Rayleigh pubblicato in prima edizione nel 1877, in seconda edizione nel 1894 (4); i primi cinque capitoli di questo trattato sono dedicati alla teoria delle oscillazioni. Essi contengono, fra l'altro, i celebri teoremi, dovuti appunto a Lord Rayleigh, sulle variazioni delle frequenze dei piccoli movimenti intorno a una posizione di equilibrio stabile, al variare dell'inerzia, della elasticità, e per l'introduzione di nuovi vincoli.

Nella «*Theory of Sound*» troviamo lo studio delle oscillazioni lineari già considerate da Lagrange tenendo però conto di forze resistenti proporzionali e di verso contrario alla velocità (Lord Rayleigh introduce a questo proposito la cosiddetta funzione di dissipazione), inoltre troviamo la teoria delle oscillazioni forzate lineari, cioè delle oscillazioni che si generano in un sistema soggetto oltre che a forze elastiche e resistenti anche a forze esterne, di solito funzioni sinusoidali del tempo (perciò le oscillazioni senza forze esterne si dicono anche libere), teoria che, almeno nel caso di un grado di libertà, risale ad Eulero (1739) e che conduce all'interpretazione dei ben noti fenomeni di riso-

(4) Mi riferisco alla ristampa a cura di Robert Bruce Lindsay (Dover, New York, 1945).

nanza. Inoltre, sempre nella «Theory of Sound» si considerano anche le oscillazioni libere o forzate delle correnti e delle tensioni dei circuiti elettrici ordinari, cioè le oscillazioni elettriche, la cui teoria è però, dal punto di vista analitico, identica a quella delle oscillazioni meccaniche lineari già da noi considerate.

Dopo l'opera di Lord Rayleigh sono apparsi numerosi volumi dedicati alla teoria delle oscillazioni. Non è il caso di menzionarli qui; non possiamo però tacere del trattato di G. Krall ⁽⁵⁾, scritto con la collaborazione del collega Einaudi, in cui quella teoria, aggiornata fino alla data di pubblicazione del libro (1940), è svolta in modo completo, per i sistemi discreti e per i sistemi continui, ed applicata ad importanti questioni di carattere tecnico.

4. — Come si è già accennato, nei sistemi citati finora e nel caso delle oscillazioni libere, l'energia totale o rimane costante o, se esistono forze resistenti, decresce, sicchè nel caso lineare ogni coordinata è espressa, in generale, come somma di moti oscillatori smorzati. Invece nelle oscillazioni forzate le coordinate del sistema sono funzioni sinoidali o periodiche con lo stesso periodo dell'azione forzante, in altre parole diremo che il sistema compie oscillazioni persistenti. Queste oscillazioni sono possibili perchè l'energia dissipata viene compensata dal lavoro delle forze esterne, cioè da una immissione, nel sistema oscillante, di energia dall'esterno.

Però, in numerosi dispositivi anche di grande interesse tecnico (per esempio nei dispositivi a tubi elettronici che rendono possibile la radiotelegrafia e la televisione) si ha un sistema elettrico o meccanico (che per semplificare supporremo a un grado di libertà) il quale compie oscillazioni persistenti non prodotte da azioni esterne applicate al sistema stesso (sicchè tali oscillazioni debbono considerarsi libere); ma sostenute compensando le inevitabili perdite mediante prelevamenti di energia da sor-

⁽⁵⁾ G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Zanichelli, Bologna, 1940.

genti esterne, effettuati automaticamente dal sistema stesso. Non entreremo in particolari descrittivi, ma passeremo ad indicare alcune equazioni differenziali che rappresentano i sistemi in discorso. Una di queste equazioni è stata scritta da Lord Rayleigh. Egli suppone che l'azione della sorgente di energia si possa rappresentare con una forza proporzionale e nello stesso verso della velocità, cioè una forza il cui lavoro è positivo sicchè la sorgente può immettere energia in quantità superiore all'energia dissipata. Allora, com'è facile comprendere, le oscillazioni invece che smorzarsi tenderebbero ad esaltarsi indefinitamente, il che è contrario alla esperienza più comune. Lord Rayleigh supera questa difficoltà ammettendo anche la presenza di una forza resistente proporzionale al cubo della velocità, quindi insensibile quando la velocità è piccola, ma notevole quando la velocità è sufficientemente grande sicchè tale forza vieta alle oscillazioni di esaltarsi oltre un certo limite. Poichè sul sistema agisce sempre un'azione di tipo elastico si giunge all'equazione (u indica la coordinata del sistema):

$$(1) \quad \frac{d^2u}{d\tau^2} + k \frac{du}{d\tau} + \frac{k'}{3} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^3 + \omega_0^2 u = 0$$

dove k e k' sono costanti positive e τ indica il tempo. Ora posto:

$$(2) \quad t = \omega_0 \tau, \quad \varepsilon = \frac{k}{\omega_0}, \quad x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \omega_0 u$$

si ottiene:

$$(3) \quad \ddot{x} - \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3} \right) + x = 0$$

dove ovviamente $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ sono le derivate prime e seconde di x rispetto a t . Derivando questa equazione rispetto a t e ponendo $\dot{x} = y$ si ha:

$$(4) \quad \ddot{y} - \varepsilon (1 - y^2) \dot{y} + y = 0.$$

Questa è la celebre equazione di Van der Pol che, almeno in un caso semplice, rappresenta quei dispositivi e tubi elettronici

della radiotelefonìa o televisione a cui si è accennato poco fa. Siamo così giunti all'equazione più nota delle oscillazioni non lineari che potremo chiamare ancora libere o meglio autonome in quanto nelle equazioni (3) e (4) non compare esplicitamente il tempo.

Le (3) e (4) rientrano nell'equazione non-lineare molto più generale ($F(y, \dot{y})$ e $g(y)$ indicano due funzioni, la prima di $y, \dot{y}$, la seconda solo di y):

$$(5) \quad \ddot{y} + F(y, \dot{y}) + g(y) = 0$$

equazione che, nel caso $F(y, \dot{y}) = f(y)\dot{y}$, dove $f(y)$ cambia di segno almeno due volte per y variabile da $-\infty$ a $+\infty$, si riduce alla cosiddetta equazione di Liénard.

5. — Riservandoci di ritornare alla (4) o più in generale alla (5) trattiamo ora un caso particolare della (5) stessa che ci permetterà di mettere in evidenza varie proprietà delle oscillazioni non lineari.

Consideriamo l'equazione in y :

$$(6) \quad \ddot{y} + f(a^2)\dot{y} + y = 0 \quad a^2 = \dot{y}^2 + y^2$$

dove $f(a^2)$ è una funzione di a^2 con un numero discreto di zeri semplici, reali e positivi.

L'equazione differenziale (6) non ha solo un significato matematico, ma rappresenta anche, sia pure con una certa approssimazione, un sistema fisico. Si consideri per esempio un circuito elettrico formato da un'auto induzione L da una capacità C e da una resistenza R in serie, supponiamo aver scelto le unità di misura in modo che sia $L = C = 1$. Allora, detta y la differenza di potenziale fra le armature e il condensatore, $\dot{y}$ sarà la densità di corrente e varrà l'equazione:

$$\ddot{y} + R\dot{y} + y = 0.$$

Ora R dipende dalla temperatura ossia dal calore di Joule che si sviluppa nel circuito, ma, se R è molto piccolo, si può sup-

porre la corrente del circuito sensibilmente sinoidale e di pulsazione 1 sicchè R viene a dipendere dal quadrato del valore efficace di $\dot{y}$ cioè da $\frac{\dot{y}^2 + y^2}{2}$ (6) o, che è lo stesso, da a^2 . Si ottiene così, posto $R = f(a^2)$, la (6) e poichè, con opportuni dispositivi elettronici su cui non insistiamo, R può assumere anche valori negativi (7) per certi valori di a^2 , si può concludere che $f(a^2)$ può avere un numero discreto di zeri. $a_1^2, a_2^2 \dots \dots a_r^2, a_n^2$.

Passiamo ora allo studio matematico della (6), ma, per ottenere qualche interpretazione fisica dei risultati, ammettiamo che essa rappresenti rigorosamente il circuito elettrico di cui si è già parlato.

Moltiplicando la (6) per $\dot{y}$ si ha:

$$(7) \quad \frac{da^2}{dt} = -2f(a^2)\dot{y}^2$$

Poichè nel caso di un circuito a^2 vale il doppio dell'energia totale (cioè l'energia magnetica sommata con l'energia elettrica) la (7) rappresenta, in sostanza, la variazione dell'energia a trascorrere del tempo. La (6) ammette, come facilmente si verifica, la soluzione periodica

$$(8) \quad y = a_r \sin(t + \varphi)$$

dove φ è una costante arbitraria, e a_r si supporrà sempre, per comodità, positiva. L'interpretazione energetica di questa soluzione è ovvia: per la (7) $\frac{da^2}{dt} = 0$, l'energia dissipata è, istante per istante, compensata dall'energia immessa, sicchè il circuito è sede di una oscillazione persistente.

(6) Infatti se $y = a \sin t$, $\dot{y} = a \cos t$ il quadrato del valore efficace di $\dot{y}$ è $\frac{a^2}{2} = \frac{\dot{y}^2 + y^2}{2}$.

(7) Come si è detto R negativo significa che dell'energia viene immessa nel circuito.

Tracciamo ora nella figura 1 il grafico di $\frac{da^2}{dt}$ o di $-f(a^2)$, supponendo, per fissare le idee, $-f(0) > 0$

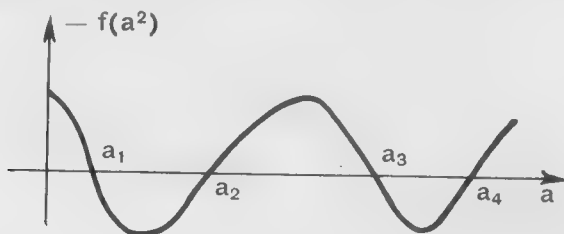


Fig. 1.

Ora se inizialmente $a < a_1$ ⁽⁸⁾, per la (7) $\frac{da^2}{dt}$ è positiva, salvo al più qualche punto isolato in cui si annulla, e perciò va crescendo; con una analisi un po' accurata, che omettiamo, si trova che il suo limite è a_1 . In modo analogo se inizialmente fosse $a_1 < a < a_2$ si avrebbe $\frac{da^2}{dt} < 0$ ed a tenderebbe decrescendo ad a_1 . Queste considerazioni ci portano a concludere che la soluzione di ampiezza a_1 è stabile. Lo stesso accade, come sarebbe facile verificare, per la soluzione di ampiezza $a_3, a_5, \dots$ ecc. Invece le soluzioni di ampiezza $a_2, a_4, \dots$ ecc., risultano instabili. Consideriamo infatti la soluzione di ampiezza a_2 ; se per una causa qualsiasi diminuisce a anche di poco, ragionando come poco fa, si dimostra che essa finisce col portarsi al valore a_1 , quella soluzione è perciò instabile, come si è affermato. Con analogo ragionamento si potrebbe provare che la posizione di equilibrio corrispondente alla soluzione $y = 0$ della (6) è instabile.

Possiamo dunque, più in generale, affermare (e lo si potrebbe dimostrare rigorosamente con ragionamenti elementari) che ogni soluzione della (6) tende asintoticamente ad una soluzione periodica stabile. Per meglio precisare questi risultati rappresentiamo nel piano delle fasi $y, \dot{y}$ le soluzioni della (6) (fig. 2). Le soluzioni periodiche rappresentate da (7) sono cerchi di

⁽⁸⁾ a si assume positivo come le a_r .

raggio $a_1, a_2 \dots a_r, \dots a_n$. Consideriamo ora le soluzioni di (6) le cui condizioni iniziali sono interne al cerchio di raggio a_2 poiché per esse a tende ad a_1 , le soluzioni in discorso devono tendere

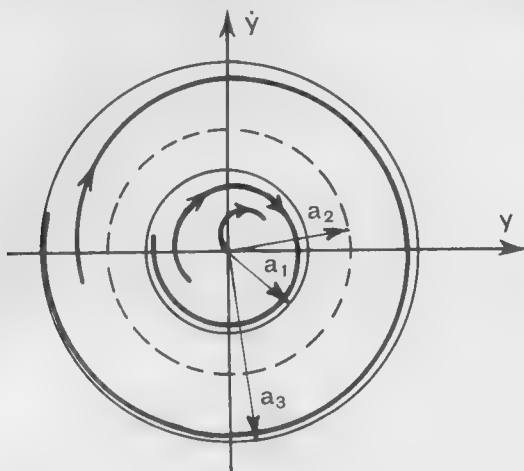


Fig. 2.

asintoticamente alla soluzione periodica di ampiezza a_1 e con analisi più precisa si può dimostrare come le curve che le rappresentano nel piano $y, \dot{y}$ siano spirali che dall'interno o dall'esterno tendono alla circonferenza di raggio a_1 . In altre parole la circonferenza in discorso è, secondo una locuzione di Poincaré, un ciclo limite stabile. In modo analogo si prova che sono cicli limiti stabili le circonferenze di raggio a_3 ⁽⁹⁾, a_5 ecc. sono instabili quelle di raggio a_2, a_4 ; nelle figure 2 e 4 i cicli stabili sono rappresentati da linee unite, da linee tratteggiate gli instabili.

Possiamo dunque concludere che, nel nostro caso, esistono un numero discreto di soluzioni periodiche indipendenti dalle condizioni iniziali e rappresentate nel piano delle fasi da cicli limiti alternativamente stabili e instabili, le altre soluzioni sono tutte oscillatorie e tendono tutte alle soluzioni stabili.

⁽⁹⁾ Le soluzioni che tendono al ciclo limite di raggio a_3 hanno condizioni iniziali della corona circolare fra a_2 e a_4 ; quelli che tendono a a_5 fra a_4 e a_6 ecc.

Queste proprietà, che si dimostrano comuni a una vasta classe di sistemi non lineari, sono, come si vede, essenzialmente diverse da quelle, già richiamate, dei sistemi lineari.

Consideriamo anche il caso in cui la curva che esprime $-f(a^2)$ sia del tipo della figura 3 cioè $-f(a^2) < 0$ per $a^2 = 0$ ecc. Le considerazioni già esposte portano a concludere stabili

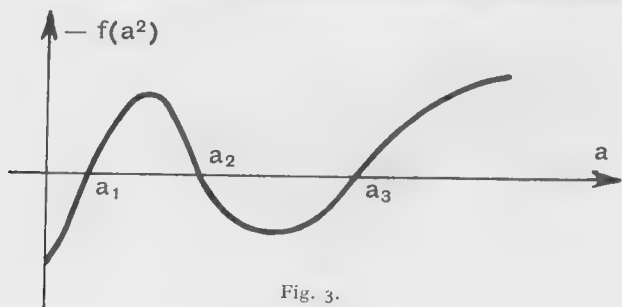


Fig. 3.

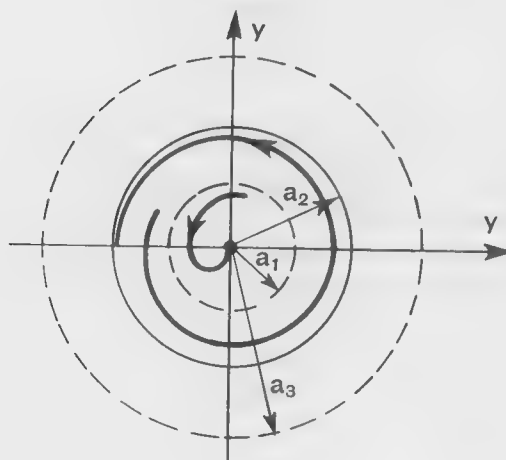


Fig. 4.

le soluzioni periodiche di ampiezza $a_2, a_4 \dots$ ecc. e la soluzione di equilibrio, mentre sarebbero instabili quelle di ampiezza $a_1, a_3 \dots$ ecc. I cicli limiti corrispondenti a queste soluzioni sono rappresentati nel piano delle fasi nella figura 4 in cui l'origine è posizione di equilibrio stabile.

In particolare, se le condizioni iniziali si trovano entro il cerchio di raggio a_1 la soluzione corrispondente tende alla posi-

zione di equilibrio, invece se le condizioni iniziali cadono nella corona circolare fra a_1 e a_3 (a_3 può essere anche uguale all'infinito) la soluzione corrispondente tende asintoticamente a quella rappresentata dal ciclo limite di raggio a_2 . In tal modo si può interpretare il cosiddetto fenomeno dell'eccitazione « dura »: un sistema in equilibrio stabile può essere portato con opportuna variazione delle condizioni iniziali (eventualmente mediante l'azione di forze impulsive) in una posizione corrispondente a punti della corona circolare sopra indicata e quindi il sistema tende a raggiungere uno stato di oscillazione persistente.

Cerchiamo di chiarire questi risultati mediante un esempio: potremo così conoscere anche un altro interessante fenomeno. Sia:

$$(9) \quad f(a^2) = \alpha - 2\beta a^2 + \gamma a^4$$

con α, β, γ positivi. Se $\beta^2 > \alpha\gamma$ $f(a^2)$ ha due soluzioni reali positive a_1, a_2 la $-f(a^2)$ ha la forma della figura 3 e la dispo-

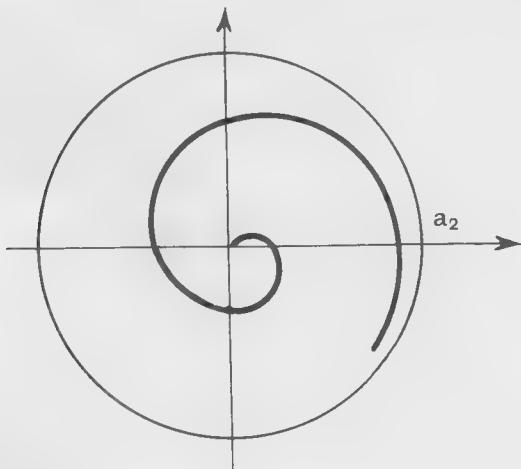


Fig. 5

sizione dei cicli limiti è conforme alla figura 4; si può avere eccitazione dura, solo se le condizioni iniziali sono oltre la circonferenza di raggio a_1 .

Supponiamo ora che il sistema sia inizialmente nella condizione di equilibrio. Si diminuisca poi molto lentamente il parametro a fino a raggiungere il valore zero; come è facile provare a_1 andrà diminuendo e quando $a = 0$ assumerà il valore zero, se a continua a decrescere si ha $a < 0$, $a_1^2 < 0$ e rimane solo il ciclo limite stabile di raggio a_2 , mentre l'origine diventa una posizione di equilibrio instabile (fig. 5); allora una piccola perturbazione porterà il sistema ad oscillare sul ciclo limite. Facciamo ora crescere a sino a ritornare al valore iniziale; il sistema continuerà ad oscillare sul ciclo limite a_2 . È questo un esempio della cosiddetta isteresi oscillatoria, cioè facendo variare lentamente un parametro di un sistema per poi riportarlo nella condizione iniziale si ha, senza l'intervento di azioni esterne, che il sistema non si ritrova più nella posizione di equilibrio che aveva in principio, ma oscilla con ampiezza a_2 .

6. — Finora abbiamo messo in evidenza le proprietà dei sistemi non-lineari riferendoci a un'equazione particolarmente semplice. Ma, nei casi concreti, si presenta un'equazione come quella di Van der Pol o più in generale quella di Liénard o meglio la (5). Per trattare questa equazione dobbiamo ricorrere ad un metodo, dovuto a Lagrange, cioè al metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Riferiamoci, per fissare le idee, alla equazione di Van der Pol le cui soluzioni sono, per ε uguale a zero:

$$(10) \quad y = a \sin(t + \varphi) \quad \dot{y} = a \cos(t + \varphi)$$

dove a e φ sono costanti, a^2 è ancora il doppio dell'energia, considerando a e φ come funzioni di t . Col procedimento di Lagrange si trova:

$$(11) \quad \dot{a} = \varepsilon(1 - a^2 \sin^2 \psi) a \cos^2 \psi$$

$$(12) \quad \dot{\varphi} = -\varepsilon(1 - a^2 \sin^2 \psi) \sin \psi \cos \psi$$

$$(13) \quad \psi = t + \varphi$$

e la (11) si può anche scrivere:

$$(14) \quad \frac{da^2}{dt} = 2\varepsilon (1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \psi) a^2 \cos^2 \psi$$

equazione di ovvio significato fisico perchè rappresenta la variazione di energia del sistema. I secondi membri di (11) e (12) sono funzioni periodiche di ψ . Sviluppandoli in serie di Fourier potremo scrivere:

$$(15) \quad \dot{a} = -\varepsilon \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) + A(\psi)$$

$$(16) \quad \dot{\varphi} = B(\psi)$$

dove $A(\psi)$, $B(\psi)$ sono somme di funzioni sinoidali di ψ e multipli di ψ . Ora se ε è molto piccolo (debole non linearità) poichè $\dot{a}$ e $\dot{\varphi}$ sono proporzionali a ε , si ha che a e φ variano molto lentamente sicchè, in un intervallo di tempo abbastanza lungo, si può ritenere a e φ costanti. Allora si comprende (e un'analisi più completa lo dimostrerebbe in modo rigoroso) che il contributo delle funzioni sinoidali sui valori di a e φ è trascurabile. Si hanno così le equazioni:

$$(17) \quad \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2} a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$(18) \quad \dot{\varphi} = 0.$$

È questo il metodo di Kryloff-Bogoljubov che permette di trattare non solo l'equazione di Van der Pol, ma tutte le equazioni con debole non linearità del tipo (5) ⁽¹⁰⁾ e con $g(y) = y$. In tal modo si possono ritrovare i risultati già esposti studiando la (6), non insisteremo perciò su questo argomento. Osserveremo solo che dalla (17) si deduce che a tende asintoticamente al valore 2, cioè y tende a una funzione sinoidale di ampiezza 2 e che dalla (14) si prova facilmente come

⁽¹⁰⁾ Cioè $F(y, \dot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y})$.

il sistema non varia di energia in un periodo quando compie l'oscillazione sinoidale cioè, al solito, l'energia dissipata è compensata dall'energia immessa.

È bene notare che esistono anche altri metodi per lo studio delle equazioni con debole non-linearità; ricordo, in particolare, il metodo di Cesari. Ho accennato solo a quello di Kryloff-Bogoljubov perchè ricorre a nozioni che risalgono a Lagrange.

7. — Tornando alla equazione di Van der Pol o meglio a quella di Lord Rayleigh (3) accennerò brevemente alle sue

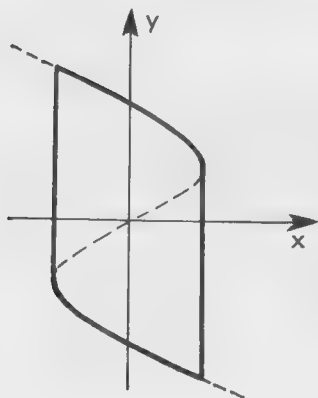


Fig. 6.

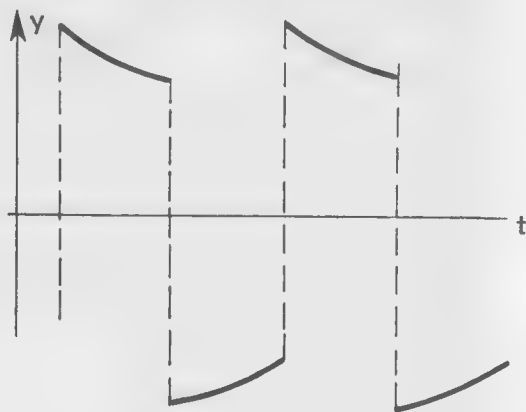


Fig. 7.

soluzioni nel caso dell'ipotesi di ε molto grande rispetto all'unità, cioè nel caso di forte non-linearità. Allora ricordando $y = \frac{dx}{dt}$ la (3) diventa:

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon \left(y - \frac{y^3}{3} \right) - x}{y}.$$

Poichè ε è molto grande si ha, sensibilmente, $\frac{dy}{dx} = \infty$ salvo che sia:

$$(20) \quad x = y - \frac{y^3}{3}.$$

In altre parole il punto di coordinate x e y che rappresenta la soluzione (19) deve percorrere rette parallele all'asse y e tratti della cubica Γ rappresentata da (20). Allora, sorvolando sulle dimostrazioni, si ha che nel piano delle fasi il punto rappresentativo del sistema, qualunque sia la sua posizione iniziale, si porta subito sul ciclo limite stabile segnato in figura 6. Perciò al trascorrere del tempo la y compie oscillazioni rappresentate nel diagramma della figura 7 cioè compie oscillazioni dette di rilassamento. Oscillazioni di questo tipo si presentano in molti altri fenomeni elettrici o meccanici.

8. — Resta da dire qualche parola sulla teoria delle oscillazioni forzate non-lineari che possono rappresentarsi aggiungendo, per esempio, al secondo membro dell'equazione di Van der Pol un termine sinoidale, cioè mediante l'equazione:

$$(21) \quad y - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = E \sin \omega t$$

con E ed ω costanti.

Per equazioni di questo tipo con metodi topologici si dimostrano teoremi di esistenza di soluzioni periodiche con periodo, $\frac{2\pi}{\omega}$, la loro stabilità ecc. Però per conoscere proprietà più precise delle soluzioni di (21) è ancora opportuno supporre debole non-linearità e ricorrere al metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Se ω è diverso da 1 o meglio $|\omega - 1|$ grande rispetto a ε conviene porre:

$$(22) \quad y = a \sin(t + \varphi) + \frac{E \sin \omega t}{1 - \omega^2}$$

$$(23) \quad \dot{y} = a \cos(t + \varphi) + \frac{E \omega}{1 - \omega^2} \cos \omega t$$

con a e φ variabili con t . Si ha così:

$$(23) \quad \frac{da}{dt} = \varepsilon(1 - y^2) \dot{y} \cos(t + \varphi)$$

$$(24) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon (1 - y^2) \dot{y} \operatorname{sen} (t + \varphi)$$

Ora, procedendo col metodo di Kryloff-Bogoljubov si ha, posto ancora $\psi = \varphi + t$,

$$(25) \quad \frac{da}{dt} = \varepsilon a \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{E^2}{2(1 - \omega^2)^2} \right) + A(\psi, t)$$

dove con $A(\psi, t)$ sono indicati i termini che supposto φ costante risultano funzioni sinoidali di pulsazione $(m \pm n\omega)$ dove m e n sono numeri interi variabili da 1 a 4. Ora se ogni $|m \pm n\omega|$ è grande rispetto a ε , il contributo di $A(\psi, t)$ può risultare trascurabile. Allora se $\frac{E^2}{2(1 - \omega^2)^2} > 1$ a tende allo zero e si ha il fenomeno delle estinzioni delle oscillazioni. Se invece qualche $m \pm n\omega$ è dell'ordine di ε , si può avere un'oscillazione con frequenza di un sottomultiplo di ω : si hanno così le cosiddette oscillazioni sottoarmoniche. Se poi $\omega - 1$ è prossimo a 1 meglio $\omega - 1$ dell'ordine di ε , la posizione (22), (23) non è più possibile perchè l'ultimo termine sarebbe molto grande. Conviene porre:

$$(24) \quad y = a \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \quad y = a\omega \cos (\omega t + \varphi)$$

e col solito metodo di variazione delle costanti arbitrarie a e φ si ricava che il sistema oscilla stabilmente sulla frequenza ω cioè si ha il fenomeno del trascinamento della frequenza.

Sono state anche studiate le oscillazioni forzate non lineari rette dall'equazione (p costante):

$$(25) \quad \ddot{y} + 2p\dot{y} + \varphi(y) = E \operatorname{sen} \omega t$$

ma su ciò non insisteremo. Così non insisteremo su questioni rappresentate da sistemi di equazioni non lineari, sulle oscillazioni quasi armoniche (cioè sulle oscillazioni rappresentate da soluzioni di equazioni lineari con coefficienti variabili) quest'ultime esposte con ampiezza nel citato libro di Krall. Aggiungeremo solo che per lo studio dei sistemi autonomi e anche non autonomi con un grado di libertà è assai utile la

teoria di Poincaré Bendixon sulle proprietà geometriche delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

9. — Termineremo con qualche notizia sulle oscillazioni nel campo biologico, la cui teoria è stata iniziata dal Volterra.

Il Volterra considera, in un ambiente chiuso, due specie di pesci, il cui numero indica con N_1 ed N_2 . La seconda specie si nutre esclusivamente di individui della prima specie, sicchè la prima specie si potrà chiamare specie mangiata, la seconda mangiante. Per studiare come variano N_1 ed N_2 al trascorrere del tempo il Volterra suppone che il coefficiente di accrescimento della specie mangiata cioè $\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt}$ sia composto da un termine positivo ε_1 (coefficiente di accrescimento in assenza della specie mangiante) al quale si deve sottrarre un termine dovuto all'influenza della specie mangiante che Volterra suppone proporzionale e di segno contrario a N_2 cioè uguale a $-\gamma_1 N_2$. Si ha così:

$$(26) \quad \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1.$$

Invece per la specie mangiante in assenza dell'altra specie il coefficiente d'accrescimento sarebbe $-\varepsilon_2$ (cioè negativo), ma la presenza della specie mangiata lo aumenta di una quantità proporzionale ad N_1 e si ha così l'equazione:

$$(27) \quad \frac{dN_2}{dt} = -(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) N_2.$$

Le (26) (27) ammettono una soluzione di equilibrio $N_{10} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$, $N_{20} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$; l'integrazione del sistema in discorso e la sua discussione porta a concludere che nel piano delle N_1 ed N_2 il punto P di coordinate $N_1(t)$ e $N_2(t)$ percorre curve chiuse che circondano il punto N_{10} ed N_{20} (fig. 8). Perciò il numero degli individui delle due specie fluttua intorno ad un valore

medio, l'ampiezza delle fluttuazioni dipende dalle condizioni iniziali.

Kolmogorov ha considerato il caso in cui i coefficienti di accrescimento siano funzioni molto generali $K_1(N_1, N_2)$, $K_2(N_1, N_2)$ di N_1 , N_2 soggette però a ragionevoli ipotesi qualitative.

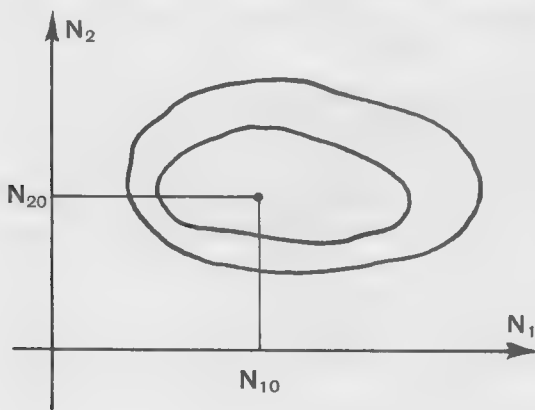


Fig. 8.

Egli ha dimostrato che, in casi molto generali, le due specie possono portarsi oscillando o non oscillando su una posizione di equilibrio N_{10} , N_{20} definita da $K_1(N_{10}, N_{20}) = 0$, $K_2(N_{10}, N_{20}) = 0$ oppure raggiungere asintoticamente un ciclo limite; in questo caso gli individui delle due specie compiono oscillazioni indipendenti dalle condizioni iniziali.

Esempi di oscillazioni sono offerti anche dall'economia matematica. La mia competenza su questo argomento è assai scarsa quindi non ne parlerò, tanto più che è abbondantemente trascorso il tempo assegnato a questa conferenza.

Problemi e progressi recenti dell'aerodinamica dei fluidi compressibili.

Riassunto. — *Sommario dei problemi dell'aerodinamica dei flussi compressibili. Applicazione della teoria delle caratteristiche ai problemi iperbolici. Calcolo numerico per una corrente transonica. Osservazioni riguardo all'uso di calcolatori elettronici.*

Con molto piacere ho accettato il tanto onorevole invito di fare un rapporto sui problemi della meccanica dei fluidi. Ho scelto come soggetto l'aerodinamica dei fluidi compressibili.

Questa disciplina s'è sviluppata soltanto dopo la morte di Luigi Lagrange. Ciò nonostante l'influenza del Lagrange è riconoscibile anche nell'aerodinamica di fluidi compressibili. Ricordiamo, per esempio, il concetto delle coordinate lagrangiane, che è uno strumento importante per l'aerodinamica dei flussi non stazionarii, e il teorema di circuitazione di Lagrange e Thompson.

La disposizione del mio rapporto è la seguente:

Parte I: Sommario dei problemi dell'aerodinamica dei fluidi compressibili.

Parte II: Applicazione della teoria delle caratteristiche ai problemi iperbolici.

Parte III: Calcolo numerico per una corrente transonica.

Parte IV: Osservazioni riguardo all'uso di calcolatori elettronici.

Farò sempre l'ipotesi che la viscosità, la conducibilità termica e le forze esterne possano essere neglette. In conseguenza resteranno esclusi i fenomeni dello strato limite e della magneto-aerodinamica.

*Parte I - SOMMARIO DEI PROBLEMI DELL'AERODINAMICA
DEI FLUIDI COMPRESSIBILI.*

L'oggetto dell'aerodinamica classica è lo stesso di quello dell'idrodinamica, cioè lo studio dei fluidi incompressibili. La densità ρ è supposta costante. Questa premessa semplifica i problemi matematici essenzialmente: Le equazioni differenziali divengono lineari. Il potenziale cinetico e la funzione di corrente soddisfano ad un'equazione lineare del secondo ordine. Questa equazione è del tipo ellittico nel caso di flussi stazionari e del tipo iperbolico nel caso di flussi non stazionari.

Se la velocità del fluido, o più precisamente, se il numero di Mach $M = \frac{V}{a}$ (velocità del flusso diviso per la velocità del suono) cresce, la premessa che la densità ρ sia costante non è più ammissibile. Bisogna tener conto della compressibilità, cioè si deve considerare la densità ρ come funzione della pressione p , $\rho = \rho(p)$, se l'entropia S è costante; oppure come funzione di p e S , $\rho = (p, S)$. Per questo, il problema matematico diventa molto più difficile: le equazioni differenziali non sono più lineari ma soltanto quasi-lineari e non è più possibile cercare di soddisfare alle condizioni iniziali ed alle condizioni al contorno per mezzo di sovrapposizione di soluzioni particolari. Inoltre la non-linearità delle equazioni provocata dalla compressibilità, ha due altre conseguenze:

1) *Prima conseguenza.* — Le equazioni dei flussi stazionari sono del tipo ellittico nel caso subsonico, cioè se il numero di Mach M è più piccolo di 1, come nel caso dei fluidi incompressibili ($M = 0$). Invece le equazioni sono del tipo iperbolico nel caso supersonico, cioè quando il numero di Mach è più grande di 1. Particolarmente difficile diventa poi il problema

matematico se la corrente è transonica, cioè se contiene sia un campo subsonico, sia un campo supersonico. In questo caso, le equazioni differenziali sono del tipo misto: si tratta di un problema di Tricomi.

2) Una seconda conseguenza della non-linearità delle equazioni differenziali provocata dalla compressibilità è, nel caso iperbolico, l'apparizione di discontinuità, cioè di onde d'urto. Tali discontinuità possono aver luogo tanto in flussi stazionari supersonici o transonici, quanto in flussi non stazionari. Nei flussi con onde d'urto si deve soddisfare non soltanto alle condizioni iniziali e alle condizioni al contorno, ma anche alle condizioni di transizione lungo l'onda d'urto.

Lo strumento più adattato ai problemi iperbolici è la teoria delle caratteristiche. Nella parte II tratteremo di questa teoria e particolarmente dei metodi di calcolo numerico (metodo delle differenze finite) che discendono dalla teoria delle caratteristiche. Discuteremo specialmente dei problemi dove il numero delle variabili indipendenti è più grande di 2 (3 o 4).

Naturalmente, il mio rapporto non pretende di dare uno sguardo d'insieme completo. Per esempio, saranno omessi tutti i metodi di linearizzazione, di linearizzazione approssimata e di linearizzazione rigorosa per passaggio al piano odografico.

Parte II - APPLICAZIONE DELLA TEORIA DELLE CARATTERISTICHE A PROBLEMI IPERBOLICI.

Il Riemann ha fondata (nell'anno 1860) la teoria delle caratteristiche per una equazione differenziale lineare del secondo ordine nel suo trattato famoso sulla propagazione di onde di pressione di grande intensità. Massau, un matematico belga, ha trovato (nell'anno 1890) un procedimento numerico di differenze finite, che è applicabile anche a sistemi di equazioni differenziali ed a problemi non lineari.

Tali metodi sono stati applicati da molti aerodinamici (da Prandl e Busemann, Ferrari, Tollmien, Sauer etc.). Sono applicati a problemi aerodinamici del tipo iperbolico con due

variabili indipendenti, cioè a flussi stazionarii supersonici bidimensionali (flussi piani o flussi assialmente simmetrici) e a correnti non stazionarie unidimensionali. Prima si sono usati questi metodi in forma grafica, ora si usano in primo luogo metodi di differenze in forma numerica, impiegando i moderni calcolatori elettronici.

Negli ultimi anni, il metodo numerico delle caratteristiche è stato generalizzato a problemi dell'aerodinamica con 3 o 4 variabili indipendenti, vale a dire a correnti supersoniche stazionarie tridimensionali (3 variabili x, y, z) ed a correnti non stazionarie bi- o tridimensionali (3 rispettivamente 4 variabili x, y, t o x, y, z, t). Tali metodi sono stati trattati, per esempio, nel mio libro «Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen» (Springer, 1958) ed in due recenti miei lavori (l'uno è pubblicato nella rivista «Numerische Mathematik», 1963, l'altro è stato pubblicato, alcune settimane fa, nella rivista dell'Istituto Matematico di Beograd). Vorrei schizzare tale metodo per una correnten on stazionaria bidimensionale di un gas perfetto. Le componenti u, v della velocità del gas e la velocità a del suono soddisfano ad un sistema di 3 equazioni di tipo iperbolico:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_x + vv_y + \frac{2}{\gamma - 1} aa_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{2}{\gamma - 1} aa_y = 0, \\ \frac{2}{\gamma - 1} (a_t + ua_x + va_y) + a(u_x + v_y) = 0. \end{array} \right.$$

$\gamma = c_p/c_v$ ($c_p, c_v =$ calori specifici costanti)

Scegliamo nello spazio x, y, t un punto arbitrario P ed un elemento superficiale passante per P . I valori di u, v e a in questo elemento superficiale si suppongono noti. Cioè si suppongono noti in P i valori di u, v, a e le derivate di u, v e a nelle direzioni contenute nell'elemento superficiale (le «derivate interne»).

Si devono distinguere i due casi seguenti:

Nel *primo* caso, il sistema (I) determina anche le « derivate esterne » di u , v e a nel punto $\dot{P}$. Nel *secondo* caso, il sistema (I) non determina le derivate esterne, ma fornisce certe relazioni lineari (le cosiddette condizioni di compatibilità) per le derivate interne secondo due direzioni arbitrarie r , s dell'elemento superficiale dato. Nel secondo caso l'elemento superficiale si dice un elemento *caratteristico*, mentre nel primo caso si dice un elemento *regolare* o *non caratteristico*.

Nel nostro problema, ci sono due famiglie di elementi caratteristici: gli elementi della prima famiglia inviluppano un cono circolare obliquo (cono di Mach) e gli elementi dell'altra famiglia passano per l'asse del cono di Mach.

Ciò posto siamo in grado di risolvere il problema dei valori iniziali con un calcolo numerico, fondato su di un metodo di differenze finite:

I valori iniziali di u , v e a nel piano $t = 0$ sono dati. Per calcolare valori approssimati di u , v e a in un punto P di un piano vicino $t = \text{cost} = \Delta t$, scegliamo 3 elementi caratteristici passanti per P , ed in ognugno di essi scegliamo una retta arbitraria e siano r_1, r_2, r_3 le tre rette. I 3 elementi caratteristici intersecheranno il piano $t = 0$ lungo 3 rette s_1, s_2, s_3 . Le condizioni di compatibilità forniscono tre equazioni lineari per le derivate di u , v e a nelle direzioni s_1 e r_1 , rispettivamente s_2, r_2 e s_3, r_3 . Così, sostituendo ai differenziali le differenze, si ottengono 3 equazioni finite per i valori approssimati di u , v e a nel punto P . Con lo stesso calcolo, si ricavano valori approssimati nei piani seguenti $t = 2\Delta t, 3\Delta t$, ecc.

Per semplificare il calcolo, si possono, per esempio, scegliere gli elementi caratteristici paralleli all'asse delle x . Allora risultano le seguenti condizioni di compatibilità

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt}\right)_{1,2} \left(u \pm \frac{2}{\gamma-1} a\right) \\ &\left(\frac{d}{dt}\right)_3 v \end{aligned} \right\} = \text{funzioni lineari delle } u_x, v_x, a_x$$

Naturalmente, il sistema (2) e il sistema (I) sono equivalenti. Le $\left(\frac{d}{dt}\right)_{1,2}$ sono derivate nelle direzioni r_1 e r_2 in elementi caratteristici tangenziali al cono di Mach, è $\left(\frac{d}{dt}\right)_3$ è una derivata nella direzione r_3 di un elemento caratteristico passante per l'asse del cono di Mach.

Parte III - CALCOLO NUMERICO PER UN PROBLEMA TRANSONICO: CORRENTE SUBSONICA ATTORNO UN PROFILO CON INCLUSIONE DI UNA ZONA SUPERSONICA.

I problemi più difficili dal punto di vista matematico sono le correnti transoniche, dove le equazioni differenziali sono del tipo misto, cioè di tipo ellittico nel campo subsonico e di tipo iperbolico nel campo supersonico. Tali problemi sono trattati nel libro eccellente di C. Ferrari e di F. G. Tricomi: *Aerodinamica trasonica* (1962). Malgrado i grandi progressi della teoria dovuti in primo luogo a Tricomi, è però tuttora necessario ricorrere ad esperimenti numerici. Tali esperimenti esigono un'intima familiarità, non soltanto con l'algebra e l'analisi, ma anche con la matematica numerica moderna, che occorre per un'utilizzazione razionale dei calcolatori elettronici.

Per illustrare queste idee con un esempio, discutiamo adesso la corrente subsonica attorno ad un profilo, con inclusione di una zona supersonica.

Il numero di Mach della corrente indisturbata sia $M_\infty < 1$. Si suppone che, in seguito all'espansione, si formi un'inclusione supersonica adiacente alla parte superiore del profilo.

Evidentemente questo problema è più complicato del classico problema di Tricomi. Invero, nel problema classico, l'equazione differenziale del tipo misto:

$$y f_{xx} + f_{yy} = 0$$

è lineare e la curva parabolica è nota fin dal principio: è la retta $y = 0$; l'equazione è del tipo ellittico se y è positivo, e

del tipo iperbolico se γ è negativo. Invece, nel nostro problema transonico, le equazioni differenziali non sono lineari ma soltanto quasi-lineari, e la curva parabolica non è nota fin dal principio ma deve essere trovata insieme alla conveniente soluzione delle equazioni differenziali.

Prima d'ogni altro, si presenta la questione se mai esistano effettivamente tali correnti transoniche dappertutto continue, cioè senza onde d'urto. I matematici giapponesi Tomotika e Tamada hanno risposto a questa questione in senso positivo: Hanno trovato una corrente subsonica con inclusione di una zona supersonica senza onda d'urto, sostituendo alla funzione $p(\varrho)$ del gas perfetto una relazione che approssima molto bene la funzione $p(\varrho)$ nel dominio transonico. Tricomi ha semplificato il risultato essenzialmente.

Ma, subito ci troviamo di fronte alla difficoltà seguente: Non si sono mai osservati nelle gallerie del vento tali flussi transonici senza onde d'urto. Certo, una causa di questa discrepanza può essere il fatto che Tomotika e Tamada hanno trascurata la viscosità e la conducibilità termica ed, in conseguenza di questo, l'influenza dello strato limite. Ma sembra essere molto verosimile, anche trascurando l'influenza dello strato limite, che correnti transoniche senza onde d'urto — (come, per esempio, la corrente di Tomotika e Tamada) — siano casi eccezionali. Vale a dire, che tali correnti sono instabili riguardo a piccole perturbazioni. Infatti, la Signora Morawetz (1956) ha tentato di provare che, sotto certe premesse, non esistano soluzioni prossime a tali correnti transoniche eccezionali.

La prova della Signora Morawetz è stata criticata. Perciò abbiamo tentato di chiarire la discrepanza fra il risultato teorico di Tomotika e Tamada e i risultati nelle gallerie del vento, con un esperimento numerico. Questo esperimento è stato eseguito dal Dott. W. Werner nel mio Istituto di Monaco per mezzo del nostro calcolatore elettronico — (chiamato Perm) — nel modo seguente:

Werner ha fatto uso dei risultati di Tomotika e Tamada aggiungendovi piccole perturbazioni. Più precisamente: Queste

perturbazioni si crearono da sé stesse in conseguenza dell'arrotondamento dei valori esatti (numeri in generale irrazionali) a numeri decimali con un dato numero di cifre. Questi valori approssimati furono presi come valori iniziali per $t = 0$ di un flusso bidimensionale, non stazionario, attorno al profilo dato da Tomotika e Tamada. Per calcolare questa corrente per $t > 0$, Werner ha usato il metodo delle caratteristiche che abbiamo discusso nella Parte II di questo rapporto, essendo x , y , e t le variabili indipendenti e u , v e a le funzioni cercate. Il risultato confermò completamente quanto avevamo aspettato: La corrente a monte della zona supersonica era praticamente stabile. Ma la parte a valle della zona supersonica non era stabile. I gradienti di pressione e di velocità diventavano sempre più grandi con t crescente, sì che era evidente che un'onda d'urto era in procinto di formarsi.

Parte IV - OSSERVAZIONI RIGUARDO ALL'USO DI CALCOLATORI ELETTRONICI.

Tutti i problemi che abbiamo discusso non potrebbero essere trattati senza l'uso di calcolatori elettronici. Per questa ragione vorrei concludere il mio rapporto con alcune osservazioni generali concernenti l'uso dei calcolatori elettronici:

I calcolatori elettronici non possono sostituire le idee creative dell'uomo, su cui si fonda ogni progresso delle scienze. Ma, queste macchine rendono possibile la valorizzazione di tali idee creative per mezzo di procedimenti numerici, che non potrebbero essere eseguiti senza l'enorme celerità di calcolo dei calcolatori elettronici.

Esiste perciò una situazione completamente nuova nell'analisi numerica: Bisogna preparare il problema matematico, prima che si possa affidarlo alla macchina. Questa preparazione comprende 2 tappe:

- 1) Scelta di metodi numerici adatti ai calcolatori elettronici.
- 2) Programmazione.

Finalmente, la discussione del risultato è una terza tappa:

3) Analisi degli errori dei risultati numerici.

1^a. Tappa.

La celerità di calcolo delle macchine elettroniche moderne rende possibile l'esecuzione di un numero di molte migliaia di volte più grande di operazioni numeriche e logiche di quello che si poteva eseguire finora. In conseguenza di ciò, è necessario riesaminare i metodi numerici classici da questo nuovo punto di vista, e di svilupparne di nuovi.

Permettetemi d'illustrare l'importanza di una scelta bene considerata di un metodo appropriato con un esempio quasi banale:

La maggior parte dei problemi numerici esige come stadio finale la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari. Sia n il numero delle equazioni e il numero delle incognite, cioè sia da risolvere il sistema

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Supponiamo inoltre che il determinante $\det(a_{ik})$ non svanisca:

$$\det(a_{ik}) \neq 0,$$

sicchè esiste una ed una sola soluzione.

Supponiamo che tre matematici, chiamati A , B e C , tentino di risolvere il sistema mediante un calcolo numerico: Il Sig. A , che è un matematico «superpuro», che non si preoccupa mai di questioni sull'esecuzione pratica di un problema, si ricorda della regola di Cramer che esige il calcolo di certi determinanti di ordine n formati coi coefficienti a_{ik} e b_i . E, poichè è un matematico superpuro, calcola questi determinanti secondo la definizione, vale a dire calcolando gli $n!$ prodotti degli elementi di differenti righe e colonne di ogni determinante. Il Sig. B è un matematico «mezzo puro». Anch'egli si serve della regola di Cramer, ma semplifica il calcolo usando

i teoremi di Laplace. E, finalmente, il Sig. C, che è un matematico un poco primitivo, procede nello stesso modo di Gauss: Elimina successivamente le incognite x_1 , x_2 ecc., ottenendo così un sistema con una matrice triangolare, con cui può calcolare prima x_n dall'ultima equazione, poi x_{n-1} dalla precedente, ecc. Ecco i tempi che esigono i calcoli dei tre matematici (il tempo dipende essenzialmente dal numero delle moltiplicazioni): Il matematico A deve eseguire circa $n!$ moltiplicazioni, B circa 2^n e C circa n^3 . Così otteniamo questo risultato: Supponiamo che sia $n = 20$ (un numero abbastanza piccolo per una macchina), e supponiamo che la celerità del calcolatore che i tre matematici usano sia mediocre. Allora, se questa macchina esegue il calcolo del matematico C in 1 secondo, il calcolo del matematico B esige circa 20 ore, e il calcolo del matematico «superpuro» A esige un miliardo di anni: uno spazio di tempo geologico.

2ª Tappa.

La seconda tappa della preparazione di un problema matematico per l'applicazione di un calcolatore elettronico concerne la programmazione. Si distinguono 2 tipi di programmi: i « programmi interni » ed i « programmi algoritmici ». I programmi interni contengono tutte le operazioni elementari che la macchina deve eseguire successivamente. Evidentemente, questi programmi per i problemi che abbiamo discusso, sono molto lunghi e complicati, e inoltre, per far un tale programma interno, è necessario essere familiare con tutti i particolari della struttura del calcolatore disponibile. Sarebbe praticamente impossibile fabbricare un tale programma enormemente lungo senza errori, ed in uno spazio di tempo non troppo grande. Perciò, l'applicazione dei calcolatori elettronici a problemi matematici complicati è divenuto realizzabile soltanto dopo che si è scoperto che basta fare dei programmi algoritmici. Questi programmi sono composti da formole matematiche e da certe altre direttive in una lingua matematica normalizzata, che è universale, cioè indipendente dalla mac-

china disponibile. I programmi algoritmici sono molto più brevi che i programmi interni, e la loro fabbricazione può essere appresa senza grandi difficoltà, perchè la conoscenza della struttura della macchina disponibile non è necessaria.

Però, come si traduce un programma algoritmico in un programma interno per un certo calcolatore disponibile? Il calcolatore stesso fa questa traduzione, perchè questa traduzione è un compito di elaborazione di informazioni al pari della soluzione di un problema numerico. Naturalmente, è necessario fare un « programma di traduzione » per ogni tipo di calcolatore elettronico, ma per mezzo di questo la macchina può tradurre ogni programma algoritmico nel programma interno corrispondente.

La lingua algoritmica più moderna è la cosiddetta lingua Algol 60 (= algorithmic language del 1960), che è stata sviluppata per iniziativa dei Signori Kl. Samelson, F. L. Bauer e H. Rutishauser in un circolo internazionale.

3ª Tappa.

La terza tappa concerne la discussione dei risultati numerici forniti dal calcolatore elettronico.

Un'analisi accurata degli errori di risultati numerici è così importante come la discussione degli errori in un esperimento fisico o tecnico, per esempio delle misurazioni in una galleria del vento. Naturalmente quest'analisi è molto difficile a causa del numero enorme delle operazioni eseguite, che non possono venir controllate dall'uomo mentre la macchina è in funzione.

Gli errori dei risultati numerici provengono da un complesso di molti fattori. Vorrei limitare la discussione ad un solo fattore: la « stabilità numerica »:

Se si applica un metodo di differenze finite (come nella teoria delle caratteristiche), le derivate sono approssimate da differenze finite. Se l'ordine dei termini finiti è più grande dell'ordine delle derivate, le soluzioni del problema finito contengono più costanti delle soluzioni del problema analitico. In questi casi è possibile che il calcolo numerico sia instabile.

Vale a dire che può accadere che, se si aggrandisce il numero degli intervalli, cresce l'influenza delle costanti esuberanti, e il risultato numerico diventa più e più inesatto.

Naturalmente, questa instabilità numerica è particolarmente pericolosa se si applicano calcolatori elettronici, perchè in questo caso il numero degli intervalli è estremamente grande. Perciò, il problema della stabilità o instabilità numerica è presentemente di palpitante attualità.

Un esempio: Il Dott. H. J. Stetter, nel mio Istituto, ha investigato, nella sua tesi d'abilitazione (1961), la stabilità di differenti metodi di differenze finite nella teoria delle caratteristiche. Ha confermato che i metodi numerici finora usati sono stabili, e oltre a ciò ha trovato parecchi nuovi metodi stabili di un più grande ordine di precisione.

Chiedo permesso di concludere il mio rapporto con una osservazione generale: L'applicazione dei calcolatori elettronici ai problemi matematici, per esempio ai problemi dell'aerodinamica, ha bisogno di matematici « all round », cioè di matematici familiari sia con la matematica cosiddetta « pura » (analisi), sia con la moderna matematica numerica, che per lo più è considerata come pertinente alla matematica cosiddetta « applicata ». Nei decenni e nei secoli precedenti, la sintesi della matematica pura con la matematica applicata era ovvia ma non più ora. Se, per esempio, si fosse chiesto ad Euler se si occupava di matematica pura o di matematica applicata, è verosimile che Euler non avrebbe nemmeno capita la questione. Quest'osservazione è del grande topologo russo Alexandroff, che l'ha fatta in occasione del giubileo di Euler a Berlino, nel 1957 (250° anniversario della nascita di Euler).

Speriamo che la coscienza dell'unità di tutta la matematica: pura ed applicata, divenga di nuovo convinzione di tutti, affinchè non accada che la matematica pura degeneri in una matematica « non applicabile », e la matematica applicata in una matematica « impura »!

Group properties of the hydrodynamic equations.

Summary. — *In this paper some aspects of the group properties theory of partial differential equations and its applications to the hydrodynamic equations are considered. Particularly discussed is the group-invariant solution concept which envelopes wide classes of particular solutions of the equations with a group property.*

Let any system S of differential equations for unknown functions $u^1, \dots, u^m$ depending on independent variables $x^1, \dots, x^{n-m}$ be given. Let T be a one-to-one transformation in the euclidean space E^n which transforms the point $(x, u) \in E^n$ into the point (x', u') . According to S. Lie the system S admits T if T conserves S as a differential manifold. Lie's theory considers only the case when all transformations T admitted by S form a continuous group G . It is said that S possesses the group property if it admits the non-trivial group G .

The differential equations in physics and mechanics give, as it is well known, wide possibilities for employing group properties. However, the algorithms of the systematic application of Lie group theory were insufficiently elaborated. Some time ago the author undertook an attempt to regenerate Lie's theory conformably to a special case of differential equations of Hydrodynamics. It renders that the general approach permits

both to recognize new regularities and to realize in a new fashion the previously known but separate facts.

The theory of group properties of differential equations includes the following problems: 1) Finding the widest continuous group G which is admitted by the given system S (*the main group of S*); 2) *Group classification* of systems S with a given structure; 3) Employing the known group, admitted by system S for the construction of particular solutions of this system; 4) Finding systems S , that admit a given group G or, in general, a group with given properties.

The solution of the first of the above mentioned problems is known thanks to the works of Lie. The computation of the main group brings about the construction of the so-called *determining equations* and the finding of their common solution. These equations are partial differential equations, linear and homogeneous, for the coefficients of an *infinitesimal operator*

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k(x, u) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

which is the generator of a one-parametric admitting group. Many examples considered show that this problem may be solved without any serious difficulties if the system S is concrete and not too complicated.

The group classification problem assumes that the given system of differential equations S contains some arbitrariness expressed in the dependence of equations of S from some parameters or functions which are not strictly fixed. Each restriction of this arbitrariness gives a system S° called *the specialization* of system S . Noting the main groups of S and S° through G and G° we conclude that always $G^\circ \supseteq G$. In this connection the problem of group classification is stated as follows: find all the S° — specializations of S , which admit essentially wider groups $G^\circ \supset G$. The two following examples helped to realize the importance of the group classification problem in Hydrodynamics.

The first was the computation of the main group for one-dimensional adiabatic gas flow equations:

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0 \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ p_t + up_x + \gamma p u_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\gamma = \text{const})$$

It was shown that among all meanings of the constant γ there is an extraordinary one, namely $\gamma = 3$, for which the main group of system (I) is wider than in the case of arbitrary γ . With $\gamma = 3$ system (I) admits, apart from the transformations admitted by it with an arbitrary γ , the following one-parametric group with parameter a :

$$t' = \frac{t}{1 - at}, \quad x' = \frac{x}{1 - at}, \quad u' = (1 - at)u + ax, \\ \rho' = (1 - at)\rho, \quad p' = (1 - at)^3 p.$$

This result was generalized to cases of two and three dimensional flows assuming an arbitrary connection between entropy, density and pressure $p = f(\rho, S)$. According to this arbitrary element of the corresponding system a complete solution of the group classification problem was given.

The second example supplied a solution of this problem for the well known Chaplygin equation being satisfied on the hodograph plane by stream function $\psi = \psi(\theta, \sigma)$ of a plane stationary non-rotational gas motion:

$$(2) \quad K(\sigma) \psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0.$$

The widest main group of the equation (2) may be represented as a three-parametric group of transformations in the plane (θ, σ) . Each function $K(\sigma)$ for which (2) admits such a three-parametric group is called *admissible* $K(\sigma)$. All admissible $K(\sigma)$ may be represented parametrically as follows:

$$K = \zeta^4(s), \quad \sigma = \frac{\zeta_0(s)}{\zeta(s)},$$

where $\zeta(s)$, $\zeta_0(s)$ are two linearly independent solutions of the equation

$$\frac{d}{ds} \left[(as^2 + bs + c) \frac{d\zeta}{ds} \right] = \zeta$$

with constants a, b, c . This result shows that all applied «approximations» of the equation (2) connected with the selection $K(\sigma)$ permit us to receive a solution of boundary problems of gas dynamics in the simple analytical form are summarized as follows. *The «approximating» equation is selected so that it admits as wide a group as possible.*

The particular solutions which one obtains with the help of the group property of a given system S are called *group-invariant solutions*. Each group-invariant solution is constructed with the help of some subgroup $H \subset G$ and because of that is also called *the H-solution*. Let the functions $I^\tau(x, u)$ ($\tau = 1, \dots, t$) form the complete set of independent invariants of the group H . In order to receive H -solutions we form a new system of equations Φ :

$$\Phi^v(I^1, \dots, I^t) = 0 \quad (v = 1, \dots, t - \varrho)$$

so that only ϱ values I^τ are independent variables. The condition of the integrability system of equations $S + \Phi$ brings about the replacement of this system by some *passive system* P (for some functions $u(x)$) and some *invariant system* S/H (for the functions $\Phi^v(I)$). The number ϱ is the *rank* of considered H -solutions. A second whole number, *defect of invariance*, which is defined as $\delta = \varrho + m - t$, is introduced. It has a simple geometrical sense of the difference between the dimension of minimal invariant manifold of group H which contains the H -solution and the dimension of the H -solution itself (i.e. $n - m$).

The H -solution corresponding to $\delta = 0$ is called *invariant H-solution*. In this case the passive system P does not appear. It is worth noting that a concept of the invariant solution existed before. For example, in Hydrodynamics one operates

with a «similar» solution concept that is associated with dimension analysis. However if the system S is given without any information as to the physical signification of the values connected by it, the concept of dimension is meaningless. The exact definition of the concept of «similar» solution states that it is an invariant H -solution with H as a group of tensions.

All solutions with $\delta > 0$ are called *partly invariant H -solutions*. The partly invariant solution concept possesses a great power of generality. For example, it envelopes such known solutions in gas dynamics as simple and multiple waves and function-invariant solutions of the wave equation.

The problem which is arising here is the problem of connection between different classes of H -solutions. It is clear that if H_1 is a subgroup of the group H then each H -solution is at the same time an H_1 -solution. Its ranks and defects of invariance satisfy the following inequalities: $\varrho_1 \geq \varrho$, $\delta_1 \leq \delta$. However only in the case when $\varrho_1 = \varrho$ the difficulties of finding this solution as H_1 solution do not increase if compared with finding it as an H -solution. In this connection we have proved the theorem that *if the corresponding passive system P is completely integrable owing to the system S/H than there exist such a subgroup $H_1 \subset H$ that the H -solution considered is at the same time an invariant H_1 -solution of the same rank*. The other result is that if H is an invariant subgroup of some group $H' \subset G$, the system S/H constructed for the invariant H -solutions admits the factorgroup H'/H .

These concepts and properties were applied to the problem of finding all group-invariant solutions of the system (1).

In conclusion we note one result concerning the 4th problem. The question is formulated as follows: find all systems of the kind

$$(3) \quad F_i(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

whose set of solutions forms a plane transformation group. Here we consider each solution $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ of (3) as a

transformation. The corresponding theorem states that *each system (3) with the required property is equivalent to one of the following:*

$$u_x = v_y, \quad v_x = \pm u_y$$

or

$$u_x = (v_y)^\alpha, \quad v_x = 0.$$

REFERENCES

- [1] OVSJANNIKOV L. V., *Groups and group-invariant solutions of differential equations*, «Dokladi Akad. Nauk SSSR», 1958, 118, n. 3.
 - [2] OVSJANNIKOV L. V., *Group properties of the Chaplygin equation*, «Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.», n. 1, 1960.
 - [3] OVSJANNIKOV L. V., *Group properties of differential equations*, «Novosibirsk», 1962.
-

Temps et irréversibilité en physique statistique.

Riassunto. — *Voir Introduction.*

I. INTRODUCTION.

Un des principaux objectifs de la physique statistique est de donner une interprétation quantitative de l'irréversibilité observée dans le monde macroscopique.

Il est remarquable que les grands fondateurs de la physique statistique, Maxwell et Boltzmann, aient eux-mêmes indiqué deux méthodes possibles de recherches pour mieux comprendre la signification de ce phénomène. La première correspond à la formulation de l'hypothèse ergodique. Nous ne discuterons pas le développement de la théorie ergodique dans ce travail (**). Les conditions mathématiques qu'il faut postuler pour assurer l'ergodicité sont aujourd'hui bien comprises. Ce qui manque c'est la preuve que les systèmes de la mécanique statistique satisfont à ces conditions. De plus, le temps nécessaire pour que le point représentatif parcourt la surface à énergie constante est grand, probablement de l'ordre du temps de récurrence de Poincaré (par exemple $10^{10^{10}}$ années). Or le temps nécessaire pour que la distribution des vitesses atteigne la distribution d'équilibre de Maxwell est beaucoup plus court, de l'ordre du temps qui sépare deux collisions dans un gaz (temps de « relaxation ») par exemple de

(*) Chargé de Recherches au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique.

(**) Voir par exemple la communication du Professeur ZIN à ce colloque.

l'ordre de 10^{-8} sec. Il n'y a vraiment aucune commune mesure entre ces deux échelles de temps et on peut penser que l'ergodicité du système, même si elle se trouve réalisée, est sans rapport avec l'irréversibilité macroscopique observée. Nous reviendrons sur cette question importante plus loin.

La seconde méthode due surtout à Boltzmann est la méthode cinétique. Ici, c'est l'irréversibilité à l'échelle des fonctions de distribution moléculaire qui est considérée comme primordiale.

Ainsi, pour un gaz modérément dilué (de telle manière que les corrélations spatiales n'y jouent pas de rôle) Boltzmann a indiqué l'équation suivante valable pour la fonction de distribution $f_{\mathbf{r}}(r, v, t)$ en absence de forces extérieures:

$$(1.1) \quad \frac{\partial f_{\mathbf{r}}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\mathbf{r}}}{\partial r} = C(f_{\mathbf{r}}, f'_{\mathbf{r}})$$

où C est l'opérateur de collision.

Cette équation une fois admise, il est facile d'établir le théorème H de Boltzmann qui montre qu'au bout d'un temps de l'ordre du temps de relaxation, la distribution des vitesses se rapproche de la distribution maxwellienne.

L'équation de Boltzmann décrit donc une évolution irréversible vers l'équilibre statistique. Mais il faut noter que cette équation implique la notion d'irréversibilité plus qu'elle ne la justifie. Supposons qu'au bout d'un certain temps nous inversions les vitesses, la fonction de distribution devrait alors s'écarter de la distribution Maxwellienne. L'équation de Boltzmann ne peut être applicable à la fois à l'évolution directe et à l'évolution inverse. Comme nous le verrons dans la suite, ces difficultés proviennent de ce que l'équation de Boltzmann résulte de simplifications qui rendent la discussion de sa relation avec la mécanique malaisée.

En outre, pour la description des phénomènes irréversibles autres que ceux qui se produisent dans les gaz dilués, l'équation de Boltzmann est insuffisante. La collision y est décrite comme un phénomène instantané dans le temps et

localisé dans l'espace. La séparation même du mouvement en mouvement non-perturbé ou « libre » (membre de gauche de l'équation (1.1)) et en collision (membre de droite de (1.1)) est introduite de manière intuitive et sans justification profonde.

L'objet de ce travail est de discuter la méthode cinétique de manière générale. Notre discussion sera applicable tant au cas de la mécanique classique qu'à celui de la mécanique quantique. Elle sera basée sur l'équation générale d'évolution pour la fonction de distribution des vitesses que nous avons établie récemment.

Le point essentiel est que cette équation est valable à la fois pour les situations dans lesquelles la fonction de distribution des vitesses se rapproche, de l'équilibre (c'est-à-dire de la distribution Maxwellienne) et pour celles où elle s'en éloigne. Nous pouvons ainsi discuter de manière plus précise ce qui caractérise en fait ces deux possibilités.

Dans notre discussion nous nous plaçons toujours du point de vue d'un ensemble: nous considérerons soit un ensemble de systèmes distribués dans l'espace de phases, soit un seul système incomplètement spécifié. Le problème intéressant du lien entre le comportement d'un seul système et celui de l'ensemble ne sera pas abordé (voir par exemple Philippot [3]). Nous ne discuterons pas non plus ici la notion d'entropie.

2. MÉTHODE GÉNÉRALE [2]

Nous nous plaçons dans presque tout cet exposé dans le cadre de la mécanique classique non-relativiste. Nous supposons donc valables les équations d'Hamilton (*)

$$(2.1) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

(*) Il s'agira toujours de systèmes à un grand nombre de degrés de liberté; mais pour ne pas alourdir l'écriture nous écrirons q à la place de $q_1 q_2 \dots q_N$. En outre, nous n'explicitons pas le caractère vectoriel des quantités utilisées, sauf quand la clarté de l'exposé l'exigera.

Nous pouvons représenter le système étudié par un point de l'espace des phases (p, q) .

Dès le départ nous introduisons la notion *d'ensemble* caractérisé par une densité $\varrho(q, p; t)$ dans l'espace des phases (p, q) . Nous supposons que ϱ est normalisé; nous pouvons donc interpréter

$$(2.2) \quad \varrho \, dp dq$$

comme la probabilité de rencontrer à l'instant t le point représentatif dans l'élément de volume $dq dp$.

Il est bien connu que ϱ satisfait l'équation de Liouville

$$(2.3) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \{H, \varrho\}$$

où $\{H, \varrho\}$ est le crochet de Poisson de H avec ϱ . Nous écrirons (2.3) sous la forme

$$(2.4) \quad i \frac{\partial \varrho}{\partial t} = L \varrho$$

avec

$$(2.5) \quad L = -i \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} + i \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}.$$

Une propriété importante de L est son caractère hermitien (comme l'opérateur Hamiltonien de la mécanique quantique); il en résulte immédiatement que l'équation de Liouville est invariante dans la transformation $t \rightarrow -t$, $p \rightarrow -p$ et, de ce point de vue un peu naïf, est bien « réversible ».

Nous considérons un système, enfermé dans une boîte cubique de volume Ω , tel que l'Hamiltonien puisse être décomposé en deux parties:

$$(2.6) \quad H = H_0 + \lambda V$$

H_0 correspond à l'énergie cinétique:

$$(2.7) \quad H_0 = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m}$$

et λV est l'énergie potentielle

$$(2.8) \quad \lambda V = \sum_{j>n} \lambda V_{jn}(|x_j - x_n|)$$

où λ est un paramètre de couplage; nous supposons les forces centrales et additives.

A la décomposition (2.6) correspond une décomposition similaire de l'opérateur de Liouville:

$$(2.9) \quad L = L_0 + \lambda \delta L$$

où

$$(2.10) \quad L_0 = -i \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(2.11) \quad \delta L = -i \sum_{n>j} \frac{\partial V}{\partial x_{jn}} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_n} \right) =$$

$$(2.12) \quad = \frac{i}{\Omega} \sum_{n>j} \sum_l e^{il(x_j - x_n)} i l V_l \left(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_n} \right).$$

Dans l'expression (2.12) nous avons utilisé le développement en série de Fourier de l'interaction V_{jn} .

La méthode que nous suivons est formellement analogue aux méthodes de perturbation usuelles de la mécanique quantique: nous calculons d'abord les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur L_0 pour des conditions périodiques aux bords (ce sont les ondes planes). Nous développons ensuite ϱ dans des fonctions propres de L_0 :

$$(2.13) \quad \varrho = \Omega^{-N/2} \sum_{\{k\}} \varrho_{\{k\}}(p; t) e^{i \sum_j k_j (x_j - v_j t)}$$

En introduisant le développement (2.13) dans l'équation de Liouville (2.5) nous obtenons le système d'équations suivant:

$$(2.14) \quad i \partial_t \varrho_{\{k\}}(p; t) = \sum_{\{k'\}} e^{i \sum_j k_j v_j t} \langle \{k\} | \delta L | \{k'\} \rangle e^{-i \sum_j k'_j v_j t} \varrho_{\{k'\}}(p; t)$$

où $\langle \{k\} | \delta L | \{k'\} \rangle$ est l'élément de matrice de δL dans la représentation des ondes planes:

$$(2.15) \quad \langle \{k\} | \delta L | \{k'\} \rangle = \frac{1}{\Omega^N} \int dx_1, \dots, dx_N e^{-i \sum_j k_j x_j} \delta L e^{+i \sum_j k'_j x_j}.$$

Il suffit de remplacer δL par sa valeur (2.12) pour obtenir:

$$(2.16) \quad i \partial_t \rho_{\{k\}}(p; t) = \frac{\lambda}{\Omega} \sum_{j>n} \sum_c e^{i(k_j v_j + k_n v_n) t} V_l \left(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_n} \right) \cdot e^{i[(k_j+l)v_j + (k_n-l)v_n] t} \rho_{k_j+l, k_n-l, \{k\}}(p; t).$$

En utilisant de nouveau le langage de la mécanique quantique, nous pouvons dire que (2.16) est l'équation de Liouville en représentation d'interaction.

Avant de passer à la discussion générale de ce système d'équations considérons le cas simple du scattering qui nous permettra de mettre en évidence la plupart des aspects du problème de l'irréversibilité.

3. LE SCATTERING (*).

Considérons un ensemble de particules diffusées par un centre de forces situé à l'origine (voir fig. 3.1)



Fig. 3.1.

L'Hamiltonien (2.6) se réduit ici à:

$$(3.1) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \lambda V(|r|)$$

(*) Pour plus de détails concernant cette section, consulter [4].

et le système d'équations (2.6) devient:

$$(3.2) \quad i\partial_t \varrho_k(p; t) = \frac{\lambda}{\Omega} \sum_l e^{ikvt} l V_l \frac{\partial}{\partial p} e^{-i(l+k)vt} \varrho_{k+l}(p; t)$$

Il est facile d'indiquer la solution de (3.2) correspondant à des valeurs données de $\varrho_k(p; t=0)$ à l'instant initial. Notons qu'en particulier le coefficient de Fourier ϱ_0 donne la distribution des vitesses des particules tandis que les autres coefficients de Fourier décrivent la distribution spatiale de l'ensemble (c'est-à-dire les corrélations avec le centre de force).

Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer les forces faibles. Nous résolvons alors le système (3.1) par itération et nous nous limitons aux termes d'ordre le plus bas en λ . Nous avons ainsi trois contributions pour la distribution des vitesses à l'instant t :

a) le flux non perturbé:

$$(3.3) \quad \varrho_0(p; 0)$$

b) les contributions liées uniquement à la distribution des vitesses à l'instant initial. Le terme d'ordre le plus bas est en λ^2 (correspondant à l'approximation de Born):

$$(3.4) \quad \left(\frac{\lambda}{i}\right)^2 \left(\frac{1}{\Omega}\right)^2 \sum_l \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^t dt_2 l V_l \frac{\partial}{\partial p} \cdot \\ \cdot e^{ilv(t_1-t_2)} (-l V_l) \frac{\partial}{\partial p} \varrho_0(p; 0) + o(\lambda^3)$$

c) des contributions liées aux « inhomogénéités » $\varrho_k(p; 0)$ du système à l'instant initial:

$$(3.5) \quad \frac{1}{\Omega} \sum_l \int_0^t dt_1 l V_l \frac{\partial}{\partial p} e^{-ilvt_1} \varrho_l(p; 0) + o(\lambda^2).$$

Passons à la limite d'un grand système. La somme sur l devient alors une intégrale:

$$(3.6) \quad \sum_l \rightarrow \frac{\Omega}{8\pi^3} \int d^3l.$$

De plus, nous considérerons des temps t longs par rapport à la durée d'une collision. Nous pouvons transformer (3.4) en l'expression asymptotique plus simple (cfr. app. A).

$$(3.7) \quad -\frac{\lambda^2 t}{8\pi^3 \Omega} \int d^3 l |V_l|^2 l \frac{\partial}{\partial p} \pi \delta_+(lv) (-l) \frac{\partial}{\partial p} \varrho_0(p; 0)$$

$\pi \delta_+(a)$ est défini par:

$$(3.8) \quad \pi \delta_+(a) = \pi \delta(a) + P(1/a)$$

où $\delta(a)$ est la fonction de Dirac et $P(1/a)$ dénote la partie principale de $1/a$.

La formule (3.7) donne une contribution croissant linéairement dans le temps. C'est bien à ce type d'effet que la diffusion d'un faisceau homogène doit donner naissance. L'opérateur qui agit dans (3.7) sur $\varrho_0(p; 0)$ a un sens physique très simple. On peut en effet montrer (pour un calcul analogue voir [5]) que (3.7) peut s'écrire aussi

$$(3.9) \quad \frac{\lambda^2 t}{\Omega} \frac{A}{v^3} \mathfrak{L}^2 \varrho_0(p; 0)$$

où l'opérateur $\mathfrak{L}^2$ est défini par

$$(3.10) \quad \mathfrak{L}^2 = -\left(v \wedge \frac{\partial}{\partial v}\right) \left(v \wedge \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

et où A est une constante qui ne dépend pas de la vitesse et contient toutes les caractéristiques du potentiel.

L'opérateur du scattering est ainsi (dans l'approximation de Born) formellement identique à l'opérateur du moment angulaire en mécanique quantique $\left(x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Les fonctions propres de cet opérateur sont bien connues: ce sont les fonctions sphériques de Laplace. En particulier une distribution à symétrie sphérique autour du centre est invariante.

Considérons d'abord le scattering d'un flux de particules homogène ($\varrho_k(p; 0) = 0$ pour $k \neq 0$). En retenant les termes (3.3) et (3.9) nous avons

$$(3.11) \quad \varrho_0(p, t) = \varrho_0(p; 0) - \frac{\lambda^2 t}{\Omega} \frac{A}{v^3} \mathcal{L}^2 \varrho_0(p; 0)$$

La distribution des vitesses finale est donc plus symétrique que la distribution initiale. L'effet du scattering par forces centrales est bien celui que l'on attend: augmenter la symétrie en atténuant la dissymétrie imposée par les conditions initiales.

Nous voyons apparaître une irréversibilité en tout point analogue à celle du problème de N corps que nous étudions plus loin: le scattering augmente la symétrie de la fonction de distribution des vitesses.

Est-ce que cette conclusion est générale? Pour cela, partons de nouveau de la situation homogène. Donc à $t = 0$, nous avons:

$$(3.12) \quad \varrho_0(p; t = 0) \neq 0 \quad \varrho_k(p; t = 0) = 0$$

Nous poursuivons la diffusion jusqu'à $t = t_1$. Nous obtenons alors, conformément à (3.2) et (3.11), pour les coefficients de Fourier en représentation d'interaction:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \varrho_0(p; t) &= \varrho_0(p; 0) - \frac{\lambda^2 t}{\Omega} \frac{A}{v^3} \mathcal{L}^2 \varrho_0(p; 0) \\ \varrho_k(p; t) &= - \left(\frac{\lambda}{i} \right) \int_0^t dt' e^{ikv t'} k V_k \frac{\partial}{\partial p} \varrho_0(p; 0) \end{aligned}$$

Les coefficients de Fourier en représentation normale s'obtiennent en multipliant chaque composante $\varrho_k(p, t)$ de (3.13) par le facteur de phase $\exp - ikv t_1$. A l'instant t_1 , nous préparons un nouvel ensemble en retournant les vitesses: nous obtenons donc les nouvelles conditions « initiales »:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \tilde{\varrho}_0(p; t_1) &= \varrho_0(-p; t = 0) - \frac{\lambda^2 t_1}{\Omega} \frac{A}{v^3} \mathcal{L}^2 \varrho_0(-p, t = 0) \\ \tilde{\varrho}_k(p; t_1) &= \left(\frac{\lambda}{i} \right) \int_0^{t_1} dt' e^{ikv(t_1-t')} k V_k \frac{\partial}{\partial p} \varrho_0(-p; 0). \end{aligned}$$

A ce nouvel état, nous appliquons de nouveau des équations similaires à (3.3), (3.5) pour calculer la distribution des vitesses au temps $t = 2 t_1$. Le calcul est immédiat et nous le reportons à l'Appendice I. Le résultat est qu'à l'instant $t = 2 t_1$, nous avons de nouveau comme en (3.12):

$$(3.15) \quad \begin{cases} \varrho_0(p; t = 2t_1) = \varrho_0(-p; t = 0) \\ \varrho_k(p, t = 2t_1) = \varrho_k(-p; t = 0) = 0. \end{cases}$$

Comme il fallait s'y attendre, l'évolution pendant le temps $t_1 \rightarrow 2 t_1$ a compensé l'évolution pendant le temps $0 \rightarrow t_1$. Dans la première étape, la fonction de distribution des vitesses est devenue plus symétrique et des corrélations ϱ_k ont apparus; dans la seconde, ϱ_0 devient moins symétrique et les ϱ_k disparaissent.

En vue de généraliser au problème de N corps, il est utile de présenter nos conclusions de la manière suivante:

a) Il existe des phénomènes de scattering où la distribution des vitesses devient plus symétrique après un temps long (appelons cette classe la classe +) et des phénomènes où, au moins pendant un temps fini t_1 mais aussi long que l'on veut, la distribution devient moins symétrique (classe -).

Il est clair que ces deux classes + et - correspondent à deux cas extrêmes particulièrement simples mais toute la gamme intermédiaire est possible: en particulier, nous aurons aussi le cas exceptionnel où la distribution n'est pas modifiée par la collision: il s'agit de toutes les distributions qui ne dépendent que de l'énergie totale de chaque molécule $\varrho = \varrho(H)$. Pour simplifier, nous ne discuterons cependant que les cas + et -.

b) Les deux classes sont des solutions du système (3.1) mais avec des conditions initiales différentes.

c) Dans la classe +, nous créons des corrélations ϱ_k à partir du ϱ_0 à l'instant initial (voir 3.12); dans la classe -

nous détruisons ces corrélations ϱ_k pour modifier ϱ_0 . Nous avons donc schématiquement:

$$\text{classe } + : \varrho_0 \rightarrow \varrho_k$$

$$\text{classe } - : \varrho_k \rightarrow \varrho_0$$

En principe du moins, nous pouvons réaliser expérimentalement ces deux types de situation: il suffit de réfléchir le faisceau diffusé sur un miroir sphérique parfait situé à grande distance du centre de scattering. Mais à cause de la grande cohérence des phases qui est nécessaire pour obtenir une diffusion de la classe — cette expérience est extrêmement difficile à réaliser; de plus, nous ne connaissons aucune autre technique.

Si donc nous nous trouvons devant un faisceau de particules qui va être diffusé par un centre de force, nous pouvons immédiatement déceler, de par la manière dont le faisceau a été préparé, si nous avons affaire à la classe + ou —. En particulier, s'il s'agit d'un faisceau qui n'avait pas interagi avec le centre à un temps antérieur, nous pouvons être certain que nous avons un phénomène de la classe + et que la distribution des vitesses est plus symétrique après la diffusion.

Il est évidemment très intéressant de caractériser de manière plus précise les situations correspondant à la classe + ou à la classe —. Le problème est de chercher une condition portant sur les $\varrho_k(p; t=0)$ telle que le scattering tombe dans l'une ou l'autre classe. Nous reviendrons sur ce problème lors de la discussion du problème des N corps. Mais dès maintenant, nous pouvons faire les remarques suivantes:

A chaque condition initiale correspondant à la classe + on peut associer une condition initiale correspondant à la classe —. Il suffit en effet de partir d'une condition initiale +, de faire agir la diffusion pendant un temps t_1 , arbitrairement long, et d'inverser les vitesses pour obtenir une condition initiale de la classe —.

Remarquons aussi que si la fonction de corrélation $\varrho_k(p; t = 0)$ est telle que la corrélation entre le faisceau et le centre diffuseur est à portée finie L , alors, après le temps $t_I = L|v|$ les particules qui viennent tomber sur le centre sont uniformément réparties. Dans ces conditions, au moins après le temps t_I , nous avons un scattering de classe $+$. Ceci est à rapprocher d'une condition formulée par Penrose & Percival [6] (voir aussi de Beauregard [4]). Ainsi, l'appartenance à la classe $+$ peut se formuler comme une *condition « aux limites » tellement naturelle* qu'elle explique certainement de manière intuitive la dominance des conditions initiales $+$ sur celles $-$. Il est vrai que si nous inversons le vitesses après un temps t_I nous avons, si aucune autre interaction mécanique n'a eu lieu pendant ce temps, des corrélations s'étendant sur la distance $L = t_I|v|$. Dans la limite $t_I \rightarrow \infty$, la distance de corrélation tend bien vers l'infini mais il faut réaliser des conditions d'isolement de plus en plus strictes.

4. PROBLÈME DE N CORPS.

Passons maintenant au problème de N corps et résumons d'abord brièvement quelques notions générales (pour plus de détails voir [2]). A côté de la fonction de distribution $\varrho(x_1 \dots x_N, p_1 \dots p_N; t)$ pour le système dans son ensemble nous pouvons définir des fonctions de distribution réduites; par exemple $f_s(x_1 \dots x_s, p_1 \dots p_s; t)$ désigne la probabilité de rencontrer à l'instant t , s molécules quelconques aux points $x_1 \dots x_s$ avec les moments $p_1 \dots p_s$.

Il est important de noter que les fonctions thermodynamiques telles que pression, énergie, ... *s'expriment toutes à l'aide des fonctions de distributions f_s pour s très petit.* ($s = 1, 2$ au plus 3). Inversément l'étude thermodynamique d'un système ne nous renseigne que sur les fonctions de distribution à un petit nombre de particules.

Nous nous intéressons tout particulièrement à la limite:

$$(4.1) \quad N \rightarrow \infty, \quad \Omega \rightarrow \infty, \quad N/\Omega = \text{fini}$$

Dans ce cas se produisent une série de simplifications importantes. Nous pouvons par exemple remplacer les sommes par des intégrales, (voir 3.6) utiliser un spectre continu... Physiquement cela revient à considérer un grand système (tous les systèmes macroscopiques usuels comprennent 10^{23} particules et sont donc très grands dans ce sens) et des *temps petits par rapport au temps de récurrence de Poincaré*. Comme ces temps sont excessivement longs (par exemple de l'ordre de $10^{10^{10}}$ années), cela paraît une approximation raisonnable.

Lors du passage à la limite (4.1) nous devons imposer une condition supplémentaire, à savoir que les fonctions de distribution réduites existent, c'est-à-dire que la limite

$$(4.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow \infty \frac{N}{\Omega} \text{ fini}} f_{\mathbf{r}}^{(N, \Omega)}(x_{\mathbf{r}}, p_{\mathbf{r}}; t) = f(x_{\mathbf{r}}, p_{\mathbf{r}}; t)$$

obtenue à partir de la fonction de distribution réduite $f_{\mathbf{r}}^{(N, \Omega)}(x, p, t)$ définie à l'aide d'un ensemble de N particules dans un volume Ω , existe. Nous sommes alors assurés que nous pouvons attacher des fonctions thermodynamiques bien déterminées à notre ensemble.

Comme nous l'avons montré (voir [2]) cela implique que le développement en série de Fourier de $\varrho(x_1 \dots x_N; p_1 \dots p_N; t)$ prend, à la limite d'un grand système, la forme (*):

$$(4.3) \quad \varrho(x_1 \dots x_N; p_1 \dots p_N; t) = \Omega^{-N} [\bar{\varrho}_0(p; t) + \sum_{j \neq l} \int d^3 k \bar{\varrho}(j_k, l_{-k}; t) \times \\ \times \exp i k(x_j - x_l) + \sum_{j \neq l \neq p} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \delta^k(k_1 + k_2 + k_3) \times \\ \times \bar{\varrho}(j_{k_1}, l_{k_2}, p_{k_3}; t) \exp i(k_1 x_j + k_2 x_l + k_3 x_p) + \dots]$$

(*) Le développement (4.3) s'obtient à partir de (2.13) en attachant à chaque $\varrho_{(k)}(p; t)$ une dépendance particulière en le volume du système. Pour simplifier l'écriture nous avons absorbé dans les coefficients de Fourier de (4.3) les facteurs $\exp -i \sum_j k_j v_j t$ qui apparaissent explicitement dans (2.13).

où les différents coefficients de Fourier $\bar{\varrho}_0, \bar{\varrho}(j_k \dots)$ sont tels que:

$$\int dv^{N-n} \bar{\varrho}(j_{k_1}, l_{k_2} \dots; p_1 \dots p_N; t)$$

soient *finis* dans la limite $N \rightarrow \infty, n$ *fini*.

Nous nous sommes limités dans (4.3) au cas d'un système homogène, c'est-à-dire invariant par rapport à la translation:

$$(4.4) \quad \varrho(x_1 \dots x_N; p_1 \dots p_N; t) = \\ = \varrho(x_1 + a \dots x_N + a; p_1 \dots p_N; t)$$

Les coefficients de Fourier qui apparaissent dans (4.3) sont étroitement liés aux fonctions de corrélation. Ainsi $\bar{\varrho}(j_k, l_{-k}; p, t)$ est le coefficient de Fourier de vecteur d'onde k correspondant à la fonction de corrélation binaire les molécules j et l .

En utilisant une représentation familière de la mécanique statistique de l'équilibre nous pouvons représenter le sens physique de ces coefficients de Fourier de la manière suivante:

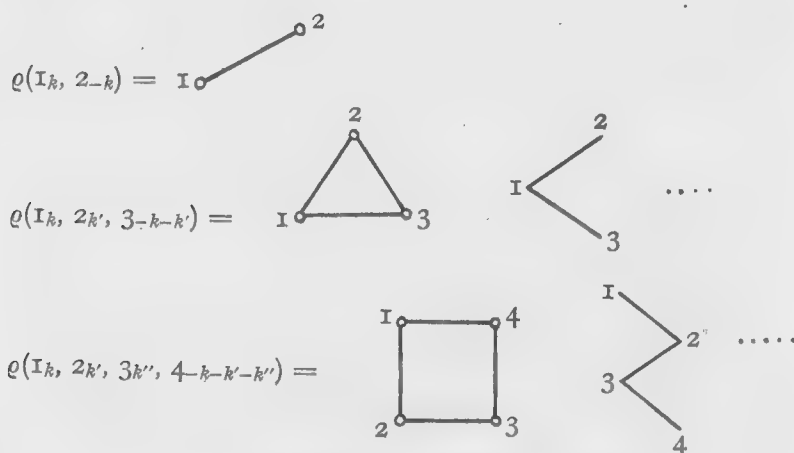


Fig. 4.1. Sens physique des coefficients de Fourier.

Nous pouvons maintenant apprécier mieux le sens physique des équations (2.14) (2.16). Les éléments de matrice $\langle \{k\} | \delta L | \{k'\} \rangle$ produisent des transitions entre l'« état de corrélation » $\{k'\}$ et l'état de corrélation $\{k\}$. Pour mieux comprendre ce point observons que les seuls éléments de matrice $\langle \{k\} | \delta L | \{k'\} \rangle$ non nuls sont tels que:

a) $\sum k_i = \sum k'_i$; cela résulte de l'invariance de translation de l'interaction V (2.8);

b) seuls 2 indices k peuvent changer à la fois: cela résulte de l'hypothèse de forces binaires dans (2.8).

En représentant par un trait les états $k \neq 0$ nous avons alors les 6 possibilités représentées sur la fig. 4.2.

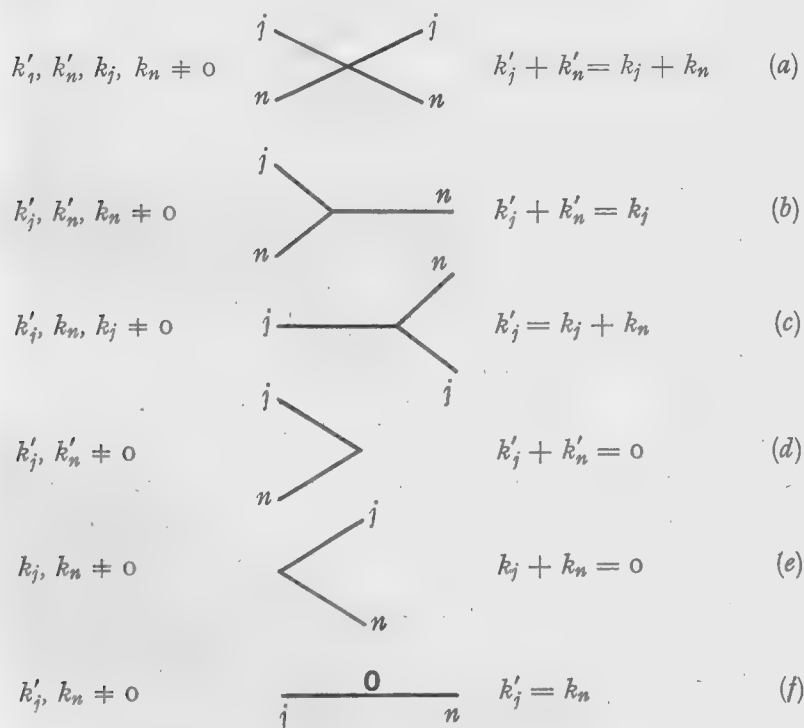


Fig. 4.2. Classifications des éléments de matrice $\langle \{k'\} | \delta L | \{k\} \rangle$.

En utilisant les fig. 4.1 et 4.2 les premières trois équations du système (2.13) ou (2.16) s'écrivent schématiquement

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varrho_0}{\partial t} &= \text{diagramme (a)} \quad \varrho_2 \\
 \frac{\partial \varrho_2}{\partial t} &= \text{diagramme (b)} \quad \varrho_0 + \text{diagramme (c)} \quad \varrho_3 + \text{diagramme (d)} \quad \varrho_2 \\
 \frac{\partial \varrho_3}{\partial t} &= \text{diagramme (e)} \quad \varrho_2 + \text{diagramme (f)} \quad \varrho_4 + \text{diagramme (g)} \quad \varrho_3
 \end{aligned}$$

Fig. 4.3. Evolution des corrélations.

En effet dans l'équation (a) de la fig. 4.3 figure à gauche ϱ_0 (« pas de lignes ») et le seul diagramme de la fig. 4.2 qui aboutira à un état sans lignes est le diagramme (e). L'équation (a) relie donc la distribution des vitesses ϱ_0 à des corrélations binaires ϱ_2 .

De même l'équation (b) relie ϱ_2 à ϱ_0 ou à une corrélation triple ϱ_3 . La cinétique des corrélations peut ainsi s'exprimer par une succession de relations:

$$(4.5) \quad \varrho_0 \rightleftharpoons \varrho_2 \rightleftharpoons \varrho_3 \rightleftharpoons \varrho_4 \rightleftharpoons \dots$$

En particulier, ici aussi nous pouvons considérer les deux situations extrêmes dans lesquelles ou bien le « flux » des corrélations se dirige des petites vers les grandes corrélations:

$$(4.6) \quad \varrho_0 \rightarrow \varrho_2 \rightarrow \varrho_3 \rightarrow \varrho_4 \dots$$

ou bien inversement, ce sont les corrélations multiples qui déterminent les corrélations d'ordre moins élevé:

$$(4.7) \quad \varrho_0 \leftarrow \varrho_2 \leftarrow \varrho_3 \leftarrow \varrho_4 \dots$$

Ces deux cas correspondent exactement aux classes + et - que nous avons étudiées dans le problème du scattering. Dans la situation (4.6) les fonctions de distribution réduites déterminent les fonctions de distribution de plus en plus fines (car ϱ_n « détermine » ϱ_m avec $n < m$) tandis que l'inverse a lieu dans (4.7).

Ici également, ces deux possibilités sont compatibles avec les lois de la mécanique. Mais, comme nous allons le voir, dans le cas (4.6), le système se rapproche de l'équilibre thermodynamique et dans le cas (4.7) il s'en éloigne. Nous allons maintenant mettre les équations de la dynamique sous une forme telle que nous pourrions reconnaître facilement laquelle des deux situations va se réaliser.

5. ÉQUATIONS CINÉTIQUES.

En regroupant les termes qui apparaissent dans la solution formelle des équations (2.14) ou (2.16) on peut donner aux équations d'évolution une forme très remarquable. Sans entrer dans les détails (voir [1, 2]), indiquons brièvement quelques étapes pour bien mettre en évidence l'extrême simplicité de la méthode. En utilisant des transformées de Laplace on peut mettre la solution des équations (2.14) sous la forme d'une série de perturbation en le paramètre de couplage:

$$(5.1) \quad \varrho_{\{k\}}(p; t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_C dz \exp - i\zeta t \sum_{\{k'\}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \\ \langle \{k\} | \frac{1}{L_0 - \zeta} \left(\delta L \frac{1}{L_0 - \zeta} \right)^n | \{k'\} \rangle \varrho_{\{k\}}(p; 0)$$

où L_0 et δL sont définis par (2.13) - (2.12). Le contour C est placé dans le plan complexe ζ au-dessus de toutes les singularités de l'intégrand. Il est sous-entendu dans ce qui suit que cette série a un sens, soit qu'elle converge soit qu'elle puisse être prolongée analytiquement.

Introduisons la notion du « *fragment diagonal* ». C'est une succession d'interactions commençant par le vide de corrélation

et se terminant en ϱ_0 sans jamais passer par le vide dans aucun état intermédiaire. Par exemple la combinaison de deux sommets (e) et (d) dans la fig. 4.2 nous donne le fragment diagonal le plus simple:

$$(5.2) \quad \text{Diagram of a lens shape (two arcs meeting at two points).}$$

Comme nous le verrons dans la suite, les fragments diagonaux ont un sens physique simple et important. Introduisons la notation

$$(5.3) \quad \text{Diagram of a lens shape with diagonal hatching} = \text{Diagram of a lens shape} + \text{Diagram of two circles touching} + \text{Diagram of a lens shape with a small circle on top} + \text{Diagram of two circles overlapping}$$

pour la somme de tous les fragments diagonaux. De même

$$(5.4) \quad \begin{array}{cc} \text{Diagram of a triangle with diagonal hatching, pointing right} & \text{Diagram of a triangle with diagonal hatching, pointing left} \\ (a) & (b) \end{array}$$

représentent la somme des fragments de « création » passant de ϱ_0 à $\varrho_{\{k\}}$ (sans jamais passer par ϱ_0 comme état intermédiaire) et de « destruction » passant de ϱ_0 à $\varrho_{\{k\}}$.

Appliquons (5.1) au calcul de $\varrho_0(t)$. L'état initial peut être soit $\varrho_0(0)$ soit $\varrho_{\{k\}}(0)$. Dans le premier cas, nous pouvons regrouper la série de perturbation en un nombre arbitraire de fragments diagonaux agissant sur $\varrho_0(0)$. Dans le second cas nous devons d'abord introduire un fragment de destruction pour passer de $\varrho_{\{k\}}(0)$ à ϱ_0 puis nous pouvons de nouveau ajouter un nombre arbitraire de fragments diagonaux.

Nous pouvons donc écrire symboliquement:

$$(5.5) \quad \varrho_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Diagram of a lens shape with diagonal hatching}^n \left| \varrho_0(0) + \sum_{\{k\}} \text{Diagram of a triangle with diagonal hatching, pointing left} \varrho_{\{k\}}(0) \right|.$$

Appelons respectivement $\Psi_{00}(\zeta)$ et $\tilde{F}_0(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0))$ les contributions du fragment diagonal (5.3) et de destruction (5.4). Par exemple la contribution de (5.2) est

$$(5.6) \quad \Psi_{00}^{(2)}(\zeta) = \lambda^2 \langle 0 | (-\delta L) \frac{1}{L_0 - \zeta} (-\delta L) | 0 \rangle$$

Nous pouvons alors écrire

$$(5.7) \quad \varrho_0(t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \exp -i\zeta t \frac{1}{-\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Psi_{00}(\zeta)}{-\zeta} \right]^n \cdot \\ [\varrho_0(0) + \tilde{F}_0(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0))]$$

où $\tilde{F}_0(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0))$ correspond à l'effet du fragment de destruction dans (5.5).

Introduisons les notations:

$$(5.8) \quad F_0(t; \varrho_{\{k\}}(0)) = -\frac{1}{2\pi} \oint_C d\zeta \exp -i\zeta t \tilde{F}_0(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0)) \\ G_{00}(t) = -\frac{1}{2\pi} \oint_C d\zeta \exp -i\zeta t (i\Psi_{00}(\zeta))$$

Il est alors facile de vérifier que nous avons l'équation d'évolution pour $\varrho_0(t)$:

$$(5.9) \quad \frac{\partial \varrho_0(t)}{\partial t} = \int_0^t dt' G_{00}(t-t') \varrho_0(t') + F_0(t; \varrho_{\{k\}}(0))$$

L'équation d'évolution pour ϱ_0 se trouve ainsi décomposée en deux termes: le premier dépend *seulement* de ϱ_0 aux instants antérieurs, le second dépend de l'ensemble des corrélations *mais seulement à l'instant initial*.

Nous pouvons encore dire que le premier terme correspond à l'évolution de la distribution des vitesses par effet des collisions. L'intégration sur le passé dans ce terme provient de ce que dans cette théorie apparaît nécessairement la durée finie

de la collision. C'est ce qui donne à ce terme son aspect « non-markoffien ». Lorsque l'on peut négliger cette durée on retombe sur un opérateur de collision qui se réduit à celui de Boltzmann si on ne retient en outre que les seules collisions binaires.

Le terme $F_0(t; \varrho_{\{k\}}(0))$ représente l'effet des corrélations initiales sur l'évolution ultérieure de la distribution des vitesses. Il est facile maintenant d'indiquer une *condition suffisante pour l'évolution vers l'équilibre*. Si

(5.10)

$$F_0(t; \varrho_{\{k\}}(0)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

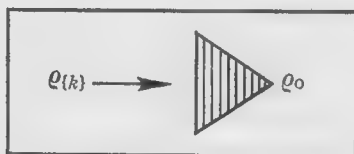
Alors, au bout d'un temps suffisamment grand, (5.9) se réduit à:

$$(5.11) \quad \frac{\partial \varrho_0(t)}{\partial t} = \int_0^t G_{00}(t - t_1) \varrho_0(t_1) dt.$$

Le comportement asymptotique de cette équation peut être analysé (voir [2]) et on peut montrer que la distribution des vitesses tend alors vers la distribution de Maxwell.

De plus, dans ce cas, les corrélations à nombre fini d'indices non nuls $k \neq 0$, s'expriment par des fragments de création appliqués à ϱ_0

(5.12)



Les fonctions de distribution *réduites* correspondant à un nombre fini de particules prennent alors les valeurs prescrites par la théorie de l'ensemblé canonique. Nous pouvons donc dire que, de ce point de vue, le système atteint l'équilibre thermodynamique.

Nous ne pouvons évidemment pas nous étendre ici sur les démonstrations qui ont été publiées ailleurs. Remarquons seulement que la validité d'équations telles que (5.11), (5.12)

implique précisément que la dynamique des corrélations se fait dans le sens (4.6). En effet ϱ_0 obéit alors à une équation séparée indépendante des autres et les corrélations d'ordre plus élevé se feront à partir de corrélations à nombre de particules plus petit (dans (5.12) nous passons successivement de ϱ_0 à une corrélation ϱ_2 puis à $\varrho_3 \dots$).

Le problème essentiel est ainsi la discussion des conditions de validité de (5.10) et comme ce terme était absent de l'équation de Boltzmann nous voyons maintenant pourquoi cette équation ne se prête absolument pas à la discussion de l'irréversibilité.

6. DISSIPATIVITÉ ET ÉVOLUTION THERMODYNAMIQUE.

Analysons de plus près l'équation d'évolution (5.9). Tout comme dans le cas du scattering nous pouvons nous limiter à l'étude de termes d'ordre le plus bas en le paramètre de couplage λ . Dans ce cas nous pouvons dans l'opérateur de collision nous limiter au seul fragment diagonal (5.2) (voir aussi 5.6). On trouve alors immédiatement en passant à la limite d'un grand système

$$\begin{aligned} \Psi_{00}(\zeta) &= \sum_{\{k\}} \langle 0 | \delta L | \{k\} \rangle \frac{1}{\sum_j k_j v_j - \zeta} \langle \{k\} | \delta L | 0 \rangle \\ (6.1) \quad &= \frac{-1}{8\pi^3 \Omega} \sum_{i>j} \int d^3 k k V_k D_{ij} \frac{1}{k g_{ij} - \zeta} k V_k D_{ij} \end{aligned}$$

avec

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_j}; \quad g_{ij} = v_i - v_j.$$

Cette expression peut être mise sous la forme d'une intégrale de Cauchy, par un changement de variable approprié (voir aussi appendice 2):

$$(6.2) \quad \Psi_{00}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \zeta}.$$

Nous pouvons définir deux déterminations à cette intégrale — $\Psi_{00}^+(\zeta)$ et $\Psi_{00}^-(\zeta)$ — (plus exactement à cet opérateur à cause des facteurs D_{ij} mais cette différence ne joue pas de rôle ici) suivant que ζ appartient au demi-plan supérieur (S^+) ou inférieur du plan complexe ζ (S^-).

On démontre (voir 2)) que $\Psi_{00}^+(\zeta)$ et $\Psi_{00}^-(\zeta)$ sont analytiques respectivement dans S^+ et dans S^- , c'est-à-dire dans le demi-plan où elles sont définies. Nous pouvons aussi, par des procédés connus, prolonger $\Psi_{00}^+(\zeta)$ dans le demi-plan inférieur: dans ce cas, $\Psi_{00}^+(\zeta)$ aura des singularités dans ce demi-plan S^- .

Dans les expressions (5.8), le contour d'intégration est une ligne située au-dessus des singularités de $F_0(\zeta)$ et de $\psi_{00}(\zeta)$.

Si nous négligeons dans (5.11) la durée des collisions, nous pourrons écrire en tenant compte de (5.8):

$$(6.3) \quad \frac{\partial F_0(t)}{\partial t} = \int_0^t dt_1 G_{00}(t - t_1) \varrho_0(t_1) \simeq \int_0^\infty d\tau G_{00}(\tau) \varrho_0(t) = \\ = i\Psi_{00}^+(0) \varrho_0(t)$$

où

$$(6.4) \quad \Psi_{00}^+(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_{00}(\zeta) \\ \zeta = 0 + i|\varepsilon| \\ \varepsilon \rightarrow 0$$

L'opérateur $\Psi_{00}^+(0)$ joue un rôle particulièrement important dans la théorie des phénomènes irréversibles parce qu'il correspond à l'effet asymptotique des collisions et ne contient que des sections efficaces de collision usuelles telles qu'elles apparaissent dans l'équation de Boltzmann ou dans les expressions (3.7) et (3.9) du scattering.

Une condition préalable pour que l'on puisse parler d'évolution thermodynamique est

$$(6.5) \quad \boxed{i\Psi_{00}^+(0) \neq 0}.$$

C'est la *condition de dissipativité*. Cette condition est étudiée en détail dans [2] (voir aussi Van Hove [9]). Elle exprime que la section efficace de collision est différente de zéro c'est-à-dire qu'il y a suffisamment de processus conservant à la fois l'énergie et la quantité de mouvement pour que la distribution des vitesses se modifie au cours du temps.

Mais cette condition est encore compatible avec les deux évolutions possibles (4.6) et (4.7). Pour distinguer entre ces deux possibilités nous devons étudier le second terme de (5.9).

A l'ordre le plus bas en λ , la seule contribution à $\tilde{F}_0(\zeta)$ provient des éléments de matrice:

$$(6.6) \quad \sum_{\{k\}} <0 \left| \left(-\frac{\delta L}{L_0 - \zeta} \right) \right| \{k\} > \varrho_{\{k\}}(0)$$

ce qui donne, à la limite d'un grand système, le résultat:

$$(6.7) \quad \tilde{F}_0(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0)) = \sum_{i>j} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k k V_k D_{ij} \frac{1}{kg_{ij} - \zeta} \varrho_{k_i - k_j(0)'}(0).$$

Cette expression est de nouveau de la forme (6.2) d'une intégrale de Cauchy, pourvu que $\varrho_{k_i - k_j(0)'}(0)$ satisfasse des conditions de régularité suffisantes; par contre, une différence essentielle entre (6.1) et (6.7) réside dans ce que F_0 dépend à la fois du potentiel d'interaction V_k et des conditions initiales.

En particulier, on peut montrer que la portée des forces et la portée des corrélations entre molécules qui vont interagir dans le futur déterminent la nature et la position des singularités de $\tilde{F}_0^+(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0))$.

Ainsi (voir [2] pour plus de détails) lorsque le potentiel a la forme exponentielle

$$(6.8) \quad V(r) = V_0 \exp -\kappa r$$

qui correspond à une portée de forces κ^{-1} , les composantes de Fourier sont

$$(6.9) \quad V_k = \frac{8\pi\kappa V_0}{(k^2 + \kappa^2)^2}.$$

Si nous considérons (6.9) comme une fonction analytique de la variable k , cette fonction a des pôles en

$$(6.10) \quad k = \pm i\kappa$$

Il en résulte que $\tilde{F}_0^+(\zeta; \varrho_{(k)}(0))$ prolongée analytiquement dans le demi-plan inférieur aura, elle aussi, un pôle en

$$(6.11) \quad \zeta = -i\kappa v$$

Ce pôle correspond à la « durée » de la collision:

$$(6.12) \quad t_C = (\kappa v)^{-1}$$

De même à la portée de la corrélation pour $t = 0$ correspond dans $\tilde{F}_0^+(\zeta; \varrho_{(k)}(0))$ des singularités dans le demi-plan inférieur dont la position détermine un ou plusieurs temps caractéristiques correspondant à la « durée des corrélations » t_{corr} . Pour des temps

$$(6.13) \quad t \gg t_{\text{coll}} \quad t \gg t_{\text{corr}}$$

nous pourrions négliger dans (5.9) l'effet de $F_0(t)$ et nous sommes ramenés à l'équation de Boltzmann généralisée (5.11).

La théorie des transformées de Fourier-Laplace et des intégrales de Cauchy fournit un critère fort général pour la validité de (5.10): si

$$(6.14) \quad F(t) = \frac{-1}{2\pi} \oint_C d\zeta \exp -i\zeta t \tilde{F}(\zeta)$$

$$(6.15) \quad \tilde{F}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \zeta}$$

il suffit en effet, pour que (5.10) soit satisfait, que $f(\omega)$ soit absolument intégrale et obéisse à la condition de Lipschitz:

$$(6.16) \quad |f(\omega_1) - f(\omega_2)| \leq A |\omega_1 - \omega_2|^\alpha \quad \alpha \leq 1$$

Dans ce cas, la fonction $\tilde{F}(\zeta)$ est une intégrale de Cauchy [10]; si nous prenons la détermination $\tilde{F}^+(\zeta)$ de cette fonction,

nous pourrions faire tendre le contour C vers l'axe réel, auquel cas le résultat (5.10) est simplement une conséquence du théorème de Riemann-Lebesgue [11] pourvu que:

$$(6.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx |F^+(x)| < B.$$

Ce résultat implique, comme on le voit facilement en comparant (6.7) à (6.15), des conditions de régularité sur les corrélations initiales $\varrho_{k_i - k_j\{0\}}$ ($t = 0$), qui seront satisfaites pour une large classe de systèmes physiques.

Cependant, il faut reconnaître que cette propriété asymptotique n'a pas un grand intérêt du point de vue physique car elle ne nous apprend rien sur l'échelle de temps après laquelle le fragment de destruction $F_0(t)$ tend vers zéro. Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de théorèmes mathématiques précis qui permettent de caractériser une telle échelle de temps et nous devons donc nous contenter de critères qualitatifs du type (6.13).

Tout comme dans le cas du scattering, nous pouvons cependant indiquer facilement des conditions initiales qui assurent que, sur un temps t_1 , arbitrairement long, la fonction $F_0(t)$ sera différente de zéro. Considérons les deux cas suivants:

a) A l'instant $t = 0$, nous partons d'un système sans corrélations:

$$(6.18) \quad \varrho_0(p; t = 0) \neq 0 \quad \varrho_{\{k\}}(p; t = 0) = 0$$

Nous laissons le système évoluer jusqu'à l'instant $t = t_1$. A ce moment, nous avons

$$(6.19) \quad \varrho_0(p; t = t_1) \neq 0 \quad \varrho_{\{k\}}(p; t = t_1) \neq 0$$

b) A l'instant $t = t_1$, nous retournons les vitesses des particules du système:

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \tilde{\varrho}_0(p; t = t_1) &= \varrho_0(-p; t = t_1) \\ \tilde{\varrho}_{\{k\}}(p; t = t_1) &= \varrho_{\{k\}}(-p; t = t_1). \end{aligned}$$

Nous étudions alors les fragments de destruction $F_0(t; \varrho_{\{k\}}(t_1))$ et $F_0(t; \tilde{\varrho}_k(t_1))$ correspondant respectivement aux états initiaux (6.19) et (6.20). Nous pouvons montrer facilement qu'avec les conditions (6.19):

$$(6.21) \quad F_0(t; \varrho_{\{k\}}(t_1)) \rightarrow 0 \quad t \gg t_{\text{coll}}$$

tandis qu'au contraire avec (6.20)

$$(6.22) \quad F_0(t, \tilde{\varrho}_{\{k\}}(t_1)) \neq 0 \quad t_1 < t < 2t_1$$

de telle manière que pour $t = 2t_1$

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \tilde{\varrho}_0(p; t = 2t_1) &= \varrho_0(-p; t = 0) \\ \tilde{\varrho}_{\{k\}}(p; t = 2t_1) &= \varrho_{\{k\}}(-p; t = 0) = 0 \end{aligned}$$

L'inversion des vitesses à $t = t_1$ produit donc une évolution « antiboltzmanienne » pendant l'intervalle de temps t_1 à $2t_1$, qui compense l'évolution « boltzmanienne » qui se déroule de 0 à t_1 .

Les calculs sont indiqués dans l'appendice II, pour le potentiel d'interaction (6.8). Nous montrons en détail que le comportement (6.22) est lié, au point de vue mathématique, à une singularité essentielle à l'infini du prolongement analytique de $\tilde{F}_0^+(\zeta; \varrho_{\{k\}}(t_1))$.

Terminons ce paragraphe par des remarques générales concernant l'inversion des vitesses. L'équation de Liouville (2.4) est évidemment invariante par rapport à la transformation

$$(6.24) \quad v \rightarrow -v; \quad t \rightarrow -t$$

Il en résulte que l'inversion des vitesses et l'inversion du temps sont des opérations équivalentes dans le cadre de la mécanique classique (en excluant la possibilité de champ magnétique).

Au lieu de retourner les vitesses à l'instant $t = t_1$ nous aurions pu à cet instant retourner le sens du temps. La discussion se ferait de manière analogue.

La seconde remarque se rapporte à l'extension quantique de nos résultats. A la place de la fonction $\varrho(q, p; t)$ nous devons alors utiliser l'opérateur densité ϱ_t de von Neumann. En représentation quantité de mouvement cet opérateur se représente par la matrice

$$(6.25) \quad \langle p | \varrho_t | p' \rangle$$

L'analogie avec le cas classique apparaît alors le plus clairement en introduisant à la place de p et p' les nouvelles variables P et k définies par (pour plus de détails voir [2] Prigogine, chapitre XIII):

$$(6.26) \quad \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (p + p') \\ k &= \frac{1}{\hbar} (p - p') \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$(6.27) \quad \langle p | \varrho_t | p' \rangle = \langle P + \frac{\hbar k}{2} | \varrho_t | P - \frac{\hbar k}{2} \rangle \equiv \varrho_k(P; t)$$

A l'opération classique d'inversion de vitesses correspond dans le cas quantique la construction d'un nouvel ensemble $\tilde{\varrho}_k(P)$ tel que

$$(6.28) \quad \tilde{\varrho}_k(p) = \varrho_k(-p) = \langle -p + \frac{\hbar k}{2} | \varrho_t | p - \frac{\hbar k}{2} \rangle$$

En particulier nous avons pour la fonction de distribution des moments

$$(6.29) \quad \tilde{\varrho}_0(P) = \varrho_0(-P)$$

Cette transformation généralise donc bien l'inversion des vitesses classique. Toute notre discussion s'étend dès lors facilement au cas quantique (voir Appendice III).

7. CONCLUSIONS.

Notre discussion a été entièrement basée sur l'équation cinétique (5.9) valable tant pour l'évolution vers l'équilibre

thermodynamique que pour des évolutions qui écarteraient le système de l'équilibre thermodynamique. La distinction entre ces deux cas se trouve ramenée à l'étude du comportement de la fonction $\tilde{F}_0^+(\zeta; \varrho_{\{k\}}(0))$ (voir § 6).

Aucun élément subjectif (ignorance des conditions initiales, information, ...) n'a été introduit dans la discussion. La notion d'irréversibilité rattachée à l'évolution d'un système vers l'équilibre thermodynamique se trouve ramenée, une fois l'hamiltonien du système donné, à l'étude des conditions initiales.

A la constatation empirique relative à la prédominance des systèmes qui se rapprochent de l'équilibre thermodynamique correspond la dissymétrie profonde entre les conditions initiales qui assurent les divers types de comportement possibles.

Pour obtenir un système qui s'écarte de l'équilibre, nous avons « retourné les vitesses » (voir §§ 3 et 6). Ce procédé peut paraître un peu artificiel. Mais il s'agit là simplement d'un moyen pour obtenir un fragment de destruction $F_0(t; \tilde{\varrho}_{\{k\}}(t_1))$ à durée de vie macroscopique.

Une question très intéressante et importante est alors celle-ci: quelles sont dans la nature les situations telles que F_0 a une durée de vie macroscopique sans que nous ne devions procéder à ce retournement des vitesses? L'expression (6.7) du fragment de destruction nous indique les facteurs qui déterminent son comportement: le potentiel V_k et les corrélations initiales $\varrho_{\{k\}}(0)$. Dès lors, on peut penser à deux types de situations: les forces gravifiques et la turbulence.

Dans le premier cas les forces sont à longue portée et il n'existe pas de « screening gravifique » qui ramènerait, comme dans le cas électrostatique, ces forces à des forces effectives à courte portée. Dans ces conditions, on peut se demander si le fragment de destruction devient effectivement négligeable à un stade quelconque de l'évolution du système. La portée des forces ne permet pas au système d'oublier ses conditions initiales.

La situation est un peu analogue dans le cas de la turbulence. Là c'est l'existence de corrélations à longue portée qui introduit l'effet de mémoire.

L'importance du fragment de destruction sur l'évolution de la fonction de distribution des vitesses d'un plasma a été mise clairement en évidence dans un travail récent de Mangeney (A. Mangeney: Équations cinétiques d'un plasma turbulent, Annales Institut Lebedeff, Moscou, à paraître 1964; voir aussi: I. Prigogine, R. Balescu, I. Krieger; Physica 26 (1960) 529).

L'intérêt de ces problèmes est qu'ils conduisent à se demander si la croyance à l'universalité du second principe de la thermodynamique n'est pas liée partiellement à la nature des forces et des corrélations qui nous sont les plus familières: les forces et les corrélations à courte portée. Car si le fragment de destruction ne s'annule pas, nous n'avons plus aucun moyen de prouver l'approche du système vers l'équilibre thermodynamique.

Revenons maintenant sur la relation entre la méthode cinétique et la méthode ergodique. Moyennant des hypothèses sur l'état initial, nous pouvons démontrer que les fonctions de distributions réduites, reliées à des composantes de Fourier ϱ_n avec n indices non nuls tels que $n \ll N$, se rapprochent de leur valeur d'équilibre statistique, c'est-à-dire de la valeur qu'elles auraient dans un *ensemble canonique*. Ces résultats ont été obtenus en utilisant le passage à la limite (4.1). Par contre, notre méthode ne nous apprend rien sur les fonctions de distribution où $n = O(N)$; le comportement global du système nous échappe complètement.

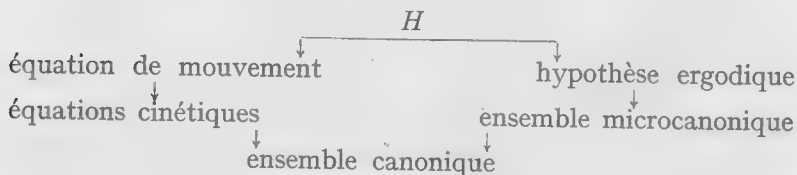
La méthode suivie est donc exactement à l'opposé de la théorie ergodique (voir par exemple Khinchin [8]) qui déduit le comportement de sous-systèmes à partir du comportement *global*, qui est supposé correspondre à un ensemble *microcanonique*. Comme nous avons vu que l'équilibre thermodynamique des propriétés réduites était atteint après des temps de l'ordre du temps de relaxation du système, alors que, d'après la théorie ergodique, l'ensemble microcanonique ne donne une description satisfaisante qu'après des temps de l'ordre du temps de Poincaré, qui sont beaucoup plus grands (voir § 1),

nous pouvons en conclure que la méthode cinétique montre que l'équilibre thermodynamique pour les propriétés réduites du système est atteint bien avant que le système global n'ait atteint une distribution microcanonique d'équilibre.

Cette conclusion n'est évidemment valable que si nous nous limitons à des systèmes pour lesquels une description thermodynamique complète puisse être donnée à l'aide des ρ_n tels que $n \ll N$, c'est-à-dire tels que toutes les propriétés thermodynamiques s'expriment par ces fonctions de distribution réduites. Il est d'ailleurs douteux que l'on puisse parler de thermodynamique si cette condition n'est pas réalisée, car dans ce cas la notion de variable intensive n'a pas de sens à la limite d'un grand système; les propriétés thermodynamiques dépendent de l'extension du système: ni la température, ni les potentiels chimiques n'auront de sens (il en est probablement ainsi pour un système de particules interagissant par des forces gravifiques seules, mais peut-on appliquer la thermodynamique à de tels systèmes?).

D'une manière tout à fait générale on peut rattacher les méthodes cinétique et ergodique au *double* rôle de l'énergie en physique statistique: La méthode cinétique découle du rôle de l'hamiltonien dans les équations du mouvement (c'est-à-dire de son rôle comme générateur de transformations unitaires infinitésimales) et la méthode ergodique du rôle de l'hamiltonien dans l'hypothèse ergodique.

Nous pouvons résumer cette situation comme suit



Nous pensons que dans l'état actuel de la physique, la méthode cinétique présente des possibilités plus étendues que la méthode ergodique, même pour l'interprétation des propriétés d'équilibre.

En effet d'une part, le problème ergodique se heurte à des difficultés sérieuses qui ont toujours comme origine la considération du système dans son ensemble. Ainsi les auteurs ont démontré (voir [2]) l'existence d'une infinité d'invariants analytiques du mouvement pour des systèmes classiques pour lesquels le passage à la limite (4.1) est autorisé. Ces invariants n'empêchent pas que les fonctions de distribution réduites tendent vers leur valeur d'équilibre mais il semblerait à première vue qu'ils empêchent le système dans son entièreté d'être ergodique. Bien entendu il n'en est rien. Si nous voulons considérer le système dans son ensemble, nous devons nécessairement considérer le système comme *fini*. Alors au bout d'un temps suffisamment long nous devons considérer aussi les recollisions de particules et les effets des bords que nous pouvons négliger dans nos méthodes cinétiques.

La seconde raison pour laquelle nous estimons que la méthode cinétique est plus féconde est qu'elle se prête à des généralisations très importantes. Si en effet nous considérons un système de particules relativistes interagissant par l'intermédiaire d'un champ, nous devons tenir compte de manière explicite des degrés de liberté du champ [13][14][15]. Ici la surface ergodique est effectivement infinie! Le temps de récurrence de Poincaré est dès lors infini lui aussi. La situation devient encore plus difficile du point de vue ergodique si on élimine les degrés de liberté du champ. Alors le système n'admet pas d'Hamiltonien (si on retient tous les ordres en $\frac{v}{c}$).

Mais bien entendu il reste des équations du mouvement qui permettent de définir un opérateur de Liouville et conduisent à un état d'équilibre bien déterminé [15]. Les propriétés de tels systèmes ne pourront sans doute jamais être déduites de considérations ergodiques.

Pourtant c'est là un des domaines où nous devons nous attendre à trouver des applications particulièrement intéressantes des méthodes statistiques (pour plus de détails voir: I. Prigogine I.C.P.A.P., Aix la Chapelle 1964; à publier par

North Holland Co, Amsterdam, 1965). Le jeu complexe des échanges d'énergie entre les degrés de liberté de la matière et du champ, l'apparition d'une double échelle de temps liée d'une part à l'approche vers l'équilibre de la matière et de l'autre à celle du champ introduisent des effets nouveaux inattendus dont nous commençons seulement à deviner l'existence.

RÉFÉRENCES

- [1] I. PRIGOGINE & P. RÉSIBOIS: « *Physica* » 27, 629 (1961).
- [2] La méthode utilisée ici est exposée dans les ouvrages suivants:
I. PRIGOGINE, *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. Wiley-Interscience: New York, London 1962.
R. BALESCU, *Statistical Mechanics of Charged Particles*. Wiley-Interscience: New York, London 1963.
P. RÉSIBOIS: *Irreversible Processes in Classical Gases*. Many Particle Physics, E. Meeron Ed. Gordon & Breach, to appear 1964.
- [3] J. PHILIPPOT, « *Physica* », 27, 490 (1961).
- [4] Voir les références [2] et P. RÉSIBOIS, « *Physica* » 25, 725 (1959).
- [5] Voir R. BALESCU: référence [2]
J. L. DELCROIX, *Introduction to the Theory of Ionized Gases*. Interscience, New York, 1960.
- [6] O. PENROSE & I. C. PERCIVAL, « *Proc. Phys. Soc.* » 79, 605 (1962).
- [7] C. DE BEAUREGARD, *Le second Principe de la Science du Temps*. Ed. Seuil, Paris 1963.
- [8] A. KHINCHIN, *Statistical Mechanics*. Dover, N. Y. 1949.
- [9] L. VAN HOVE, « *Physica* » 23, 441 (1957).
- [10] N. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations* Nordhoff-Groningen 1953.
- [11] E. TITCHMARSCH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford, N. Y., 1937.
- [12] A. MESSIAH, *Mécanique Quantique*. Dunod, 1963.
- [13] I. PRIGOGINE & B. LEAF, « *Physica* », 25, 1067 (1959).
- [14] A. MANGENEY, *Physica*, à paraître, 1963.
- [15] I. PRIGOGINE et G. DE GOTTAL, à paraître.

Appendice I

RENVERSEMENT DU TEMPS ET SCATTERING.

Nous calculons ici la fonction de distribution des vitesses $\tilde{q}_0(p; t)$ à l'instant $2t_1$, lorsque l'état du système à l'instant t_1 est décrit par (3.14), c'est -à-dire pour un système où la vitesse des particules a été renversée après qu'elles aient été diffusées pendant un temps t_1 .

Nous avons, de façon générale:

$$\begin{aligned}
 (A.1) \quad \tilde{q}_0(p; 2t_1) = & \tilde{q}_0(p; t_1) + \frac{\lambda}{i\Omega} \int_{t_1}^{2t_1} dt' \sum_k k V_k \frac{\partial}{\partial p} \\
 & \exp - ikv(t' - t_1) \tilde{q}_k(p; t) + \left(\frac{\lambda}{i\Omega} \right)^2 \int_{t_1}^{2t_1} dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \sum_{kk'} k V_k \frac{\partial}{\partial p} \\
 & \exp - ikv(t' - t'') (k' - k) V_{k'-k} \frac{\partial}{\partial p} \\
 & \exp - ik'v(t'' - t_1) \tilde{q}_k(p; t_1) + o(\lambda^3).
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.14), nous obtenons donc, à l'ordre λ^2 :

$$\begin{aligned}
 (A.2) \quad q_0(p; 2t_1) = & q_0(-p; 0) \frac{\lambda^2 t_1}{\Omega v^3} 4\Omega^2 q_0(-p; 0) + \\
 & + \left(\frac{\lambda}{i\Omega} \right)^2 \sum_k \int_{t_1}^{2t_1} dt' \int_0^{t'} dt'' k V_k \frac{\partial}{\partial p} \exp - ikv(t' - 2t_1 + t'') \times \\
 & \times k V_k \frac{\partial}{\partial p} q_0(-p; 0) + \left(\frac{\lambda}{i\Omega} \right)^2 \sum_k \int_{t_1}^{2t_1} dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' k V_k \frac{\partial}{\partial p} \times \\
 & \exp - ikv(t' - t'') (-k V_k) \frac{\partial}{\partial p} q_0(-p; 0) + o(\lambda^3).
 \end{aligned}$$

Le troisième terme de (A.3) est identique à (3.4) et donne simplement le résultat (3.10) dans la limite des temps longs,

pour lesquels on peut utiliser la formule asymptotique bien connue (voir réf. 2):

$$(A.3) \quad \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \exp a(t' - t'') = t\pi\delta_+(a).$$

Quant au deuxième terme de (A.2), il suffit d'effectuer le changement de variable

$$(A.4) \quad 2t_1 - t' = t$$

pour le mettre sous la forme:

$$-\left(\frac{\lambda}{i\Omega}\right)^2 \sum_k \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_1} dt'' k V_k \frac{\partial}{\partial p} \times \\ \times \exp ikv(t - t'') (-kV_k) \times \frac{\partial}{\partial p} \varrho_0(-p; 0)$$

qui en utilisant la décomposition:

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_1} dt dt'' = \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_1} dt'' + \int_0^{t_1} dt'' \int_0^{t_1} dt$$

et la forme asymptotique (A.3) donne simplement:

$$(A.5) \quad \frac{2t_1 A}{\Omega v^3} \mathcal{L}^2 \varrho_0(-p; 0)$$

On a donc finalement:

$$(A.6) \quad \tilde{\varrho}_0(p; 2t_1) = \varrho_0(-p; 0) - \frac{\lambda^2 t_1 A \mathcal{L}^2}{-2v^3} \varrho_0(-p; 0) + \\ + \frac{2\lambda^2 t' A \mathcal{L}^2}{\Omega v^3} \varrho_0(-p; 0) - \frac{\lambda^2 t_1 A \mathcal{L}^2}{\Omega v^3} \varrho_0(-p; 0) \equiv \varrho_0(-p, 0).$$

Appendice II

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR DE DESTRUCTION DANS UN MODÈLE SIMPLE.

Nous étudions ici les propriétés du fragment de destruction $F_0(t; \varrho_k(t_1))$ pour les conditions « initiales » données respectivement par (6.19) et (6.20). Quoique le calcul puisse se faire

par une méthode dépendante du temps tout à fait similaire à celle utilisée dans l'appendice I, nous préférons illustrer ici la méthode de la résolvante et voir en détail l'influence du renversement des vitesses sur les propriétés analytiques de la fonction $\tilde{F}_0(\zeta; \varrho_k(t_I))$.

A l'ordre le plus bas en λ , nous avons:

$$(A.7) \quad \tilde{F}_0(\zeta; \varrho_k(t_I)) = \sum_{i>j} \sum_k <0 | \delta L^{ij} | k_i - k_j > \frac{1}{kg_{ij} - \zeta} \times \\ \times \varrho_{k_i - k_j\{0\}'}(p; t).$$

Passant à la limite d'un grand système, nous avons, avec (2.11) et (2.15)

$$(A.8) \quad \tilde{F}_0(\zeta; \varrho_k(t_I)) = \frac{1}{8\pi^3\Omega} \sum_{ij} D_{ij} \int d^3k k V_k \frac{1}{kg_{ij} - \zeta} \varrho_{k_i - k_j\{0\}'}(p; t_I)$$

Nous étudions ce fragment de destruction pour les conditions initiales « directe » (6.19) et « inverse » (6.20) données respectivement par (voir (3.19) pour un calcul semblable):

$$(A.9) \quad \varrho_{k_i - k_j\{0\}'}(p; t_I) = -\frac{\lambda}{i} \int_0^{t_I} dt' \exp -kg_{ij}(t_I - t') k V_k D_{ij} \varrho_0(p; 0)$$

$$(A.9') \quad \tilde{\varrho}_{k_i - k_j\{0\}'}(p; t_I) = \frac{\lambda}{i} \int_0^{t_I} dt' \exp ikg_{ij}(t_I - t') k V_k D_{ij} \varrho_0(-p; 0) dt'.$$

En insérant (A.9) dans (A.8), nous obtenons les deux fragments de destruction « direct » et « inverse » (nous explicitons les vecteurs):

$$(A.10) \quad \tilde{F}_0^d(\zeta; \varrho_k(t_I)) = \sum_{i>j} \frac{1}{8\pi^3\Omega} D_{ij} \times \\ \times \left\{ d^3k k V_k \frac{1}{kg_{ij} - \zeta} k V_k \frac{\exp -ikg_{ij}t_I - 1}{ikg_{ij}} \right\} D_{ij} \varrho_0(p; t = 0).$$

$$(A.10') \quad \tilde{F}_0^r(\zeta; \tilde{\varrho}_k(t_I)) = \sum_{i>j} \frac{1}{8\pi^3\Omega} D_{ij} \times \\ \times \left\{ - \int d^3k k V_k \frac{1}{kg_{ij} - \zeta} k V_k \frac{\exp ikg_{ij}t_I - 1}{ikg_{ij}} \right\} D_{ij} \varrho_0(-p; t = 0).$$

Du point de vue du comportement analytique en ζ , les facteurs importants de (A.10) (A.10') sont donnés par les tenseurs entre crochets; considérons par exemple la composante $x x$ de ce tenseur (dans un système d'axe où $\bar{g}_{ij}$ est dirigé suivant l'axe z):

$$(A.11) \quad F_{xx}^{(d,r)}(\zeta; \varrho_{\{k\}}(t_1)) = \pm \int d^3k k_x V_k \times \\ \times \frac{1}{kg_{ij} - \zeta} k_x V_k \frac{\exp \mp ikg_{ij}t_1 - 1}{ikg_{ij}}.$$

les signes $(\pm)$ et $(\mp)$ correspondant respectivement au cas direct et au cas inverse.

Nous calculons l'intégrale (A.11) pour le potentiel (6.9); dans un système de coordonnées cylindriques, nous ramenons facilement cette expression à ($v = |g_{ij}|$)

$$(A.12) \quad F_{xx}^{(d,t)}(\zeta; \varrho_{\{k\}}(t_1)) = \pm \frac{16\pi^3 V_0^2 \kappa^2}{3i} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{kv - \zeta} \times \\ \times \frac{1}{(k^2 + \kappa^2)^2} \frac{\exp \mp ikvt_1 - 1}{kv}$$

qui, pour toute valeur finie de t_1 , est bien de la forme d'une intégrale de Cauchy.

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous posons $kv = u$ et, en prenant ζ dans le demi-plan supérieur, nous fermons le contour dans le demi-plan inférieur (cas direct) ou dans le demi-plan supérieur (cas inverse): par un calcul de résidu élémentaire, nous obtenons alors:

$$(A.13) \quad F_{xx}^{+(d)}(\zeta; \varrho_{\{k\}}(t_1)) = - \frac{32\pi^4 V_0^2 \kappa^2}{3v^3} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{\exp - iut - 1}{(u - \zeta)(u - i\kappa v)^2 u} \right]_{u=-i\kappa v}$$

$$(A.13') \quad F_{xx}^{+(r)}(\zeta; \varrho_{\{k\}}(t_1)) = - \frac{32\pi^4 V_0^2 \kappa^2}{3v^3} \left\{ \frac{\exp izt}{(\zeta + i\kappa v)^2 (\zeta - i\kappa v)^2 \zeta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\zeta(\zeta + i\kappa v)^2 (\zeta - i\kappa v)^2} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{\exp iut - 1}{(u - \zeta)(u + i\kappa v)^2 u} \right]_{u=i\kappa v} \right\}.$$

On vérifie facilement, en accord avec les théorèmes généraux énoncés dans le texte, que ces deux fonctions sont analytiques dans le demi-plan supérieur et y tendent vers zéro comme ζ^{-1} pour les grandes valeurs de ζ . Mais on constate aussi que les prolongements analytiques de ces fonctions dans le demi-plan inférieur (définis par (A.8) et (A.9) avec $\zeta \in S^-$) ont un comportement entièrement différent. En effet, il est facile de voir que les seules singularités du fragment de destruction direct (A.8) sont des pôles situés à une distance $(\kappa v)^{-1}$ de l'axe réel; par inversion de Laplace, on en déduit immédiatement que:

$$(A.14) \quad F_0^d(t; \varrho_{\{k\}}(t_1)) \rightarrow 0 \quad \text{pour } t \gg (\kappa v)^{-1}$$

c'est-à-dire pour des temps plus grands que la durée de collision entre les particules.

Par contre, le fragment de destruction inverse (A.13') se compose de termes dont le comportement est tout différent:

a) le premier terme de (A.13') possède une singularité essentielle à l'infini dans le demi-plan inférieur, du type $\exp - i\zeta t_1$.

b) le second terme possède un pôle à l'origine $\zeta = 0$, en plus de pôles en $\zeta = \pm i\kappa v$.

c) enfin le troisième terme se comporte comme (A.13) et donne lui aussi une contribution négligeable pour des temps grands par rapport au temps de collision.

Il faudra effectuer l'inversion de Laplace

$$(A.15) \quad F_{xx}^{+(r)}(t, \tilde{\varrho}_{\{k\}}(t_1)) = \frac{-1}{2\pi} \oint_C d\zeta \exp - i\zeta t F_{xx}^{+(r)}(\zeta; \varrho_{\{k\}}(t_1))$$

avec beaucoup de soin. En effet, d'habitude, nous pouvons supposer que:

$$(A.16) \quad F_{xx}^{+(r)}(\zeta; \tilde{\varrho}_{\{k\}}(t_1)) \rightarrow \frac{1}{\zeta^a} |\zeta| \rightarrow \infty, \quad a \geq 1$$

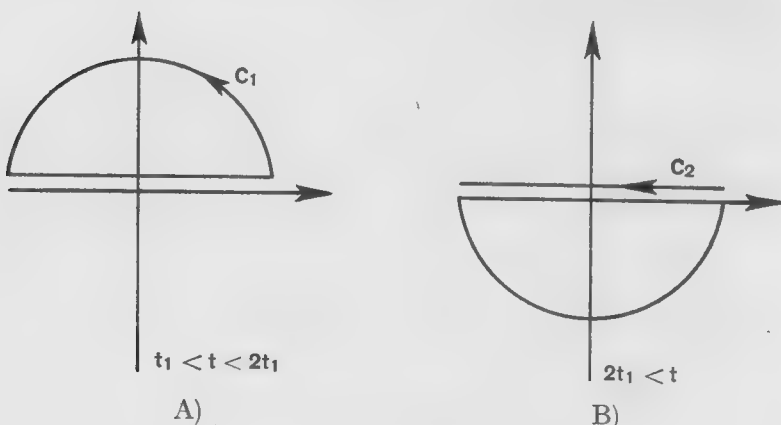
à la fois dans le demi-plan supérieur (ce qui est une propriété exacte des intégrales de Cauchy) et dans le demi-plan inférieur;

dans ce cas, nous pouvons compléter le contour C par un demi-cercle dans S^- et évaluer (A.10) pour résidus.

Dans le cas (A.13') nous pouvons toujours procéder de cette façon pour le 2ème et le 3ème terme (qui donne des contributions négligeables dès que $t \gg (\kappa v)^{-1}$) mais pour le premier terme, nous devons fermer:

a) soit dans le demi-plan supérieur si $t_1 < t < 2t_1$: (fig. A).

b) soit dans le demi-plan inférieur si $2t_1 < t$: (fig. B)



Contours d'integration

Nous obtenons alors, à des termes négligeables pour $t \gg (\kappa v)^{-1}$

$$(A.17) \quad F_{xx}^{(r)}(t; \tilde{\varrho}(k)(t_1)) = \frac{32\pi^4 i V_0^2 \kappa^2}{3v^3} \frac{1}{i(kv)^4} \quad t_1 < t < 2t_1$$

$$(A.18) \quad F_{xx}^{(r)}(t, \varrho(k)(t_1)) = 0 \quad 2t_1 < t$$

Nous voyons donc, en accord avec la théorie générale discutée dans le texte, qu'en inversant les vitesses dans un système qui évolue suivant un processus « boltzmannien », nous pouvons, pendant un temps t_1 arbitrairement long, obtenir une évolution pour laquelle le fragment de destruction de l'équation cinétique (5.9) n'est pas négligeable et telle que le

système s'écarte temporairement de l'équilibre thermodynamique.

Les calculs de cet appendice suggèrent une dernière remarque importante: nous avons signalé, dans l'exposé, qu'une condition suffisante pour obtenir un comportement irréversible était que les molécules *qui allaient interagir les uns avec les autres* n'étaient corrélées que sur une portée finie L . Cette propriété est bien confirmée ici: en effet, il est clair qu'avec l'état initial direct (A. 9), il suffit de prendre un temps t_1 suffisamment long pour que les molécules i et j soient corrélées sur des distances aussi grandes que l'on veut; pourtant, par la façon même dont ces corrélations ont été préparées, il est clair que ces molécules i et j s'éloignent de plus en plus, dans le cas direct, l'une de l'autre au fur et à mesure que le temps t_1 croît: elles vont donc s'ignorer totalement et, comme nous le montre la formule (A.14), elles ne contribuent pas au fragment de destruction. Au contraire, quand on renverse les vitesses, on « focalise » les molécules de telle sorte qu'elles puissent interagir les unes avec les autres pendant le temps t_1 : dans ce cas, il n'y a pas d'approche vers l'équilibre.

Appendice III.

RENVERSEMENT DU TEMPS EN MÉCANIQUE QUANTIQUE.

On sait que l'évolution d'un système quantique est entièrement déterminée par l'équation de von Neumann (voir réf. 2, Prigogine, chapitre XIII). En représentation d'interaction, cette équation s'écrit:

$$(A.19) \quad i \hbar \partial_t \varrho_t = [V(t), \varrho_t]$$

où nous avons considéré un Hamiltonien du type (3.1) et où

$$(A.20) \quad V(t) = e_{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}.$$

Si nous explicitons cette équation dans la représentation des ondes planes, nous obtenons:

$$(A.21) \quad i\hbar\partial_t \langle k | \varrho_t | k' \rangle = \sum_{k''} \langle k | V(t) | k'' \rangle \langle k'' | \varrho_t | k' \rangle - \\ - \langle k | \varrho_t | k'' \rangle \langle k'' | V(t) | k' \rangle$$

avec

$$(A.22) \quad \langle k | V(t) | k' \rangle = e^{\frac{i\hbar^2 k^2 t}{2m}} \langle k | V | k' \rangle e^{-\frac{i\hbar^2 k'^2 t}{2m}}$$

Il est très utile, pour effectuer des calculs explicites, de mettre cette équation sous une forme plus proche de l'équation de Liouville (2.14). A cet effet, nous utilisons le changement de variables (6.25) et la notation (6.27); après quelques calculs élémentaires, nous obtenons:

$$(A.23) \quad i\partial_t \varrho_k(P; t) = \frac{1}{\hbar} \sum_l e^{\frac{ikP}{m}} V_l \left(e^{\frac{\mathcal{N}}{2} \frac{\partial}{\partial P}} - e^{-\frac{\mathcal{N}}{2} \frac{\partial}{\partial P}} \right) \times \\ \times e^{-\frac{it(k-l)P}{m}} \varrho_{k-l}(P; t).$$

Dans cette formule, nous avons utilisé la propriété bien connue de l'opérateur de déplacement fini:

$$(A.24) \quad e^{a \frac{\partial}{\partial x}} f(x) = f(x + a).$$

On voit immédiatement l'intérêt qu'il y a à écrire l'équation de von Neumann sous la forme (A.23); dans beaucoup de problèmes, la similitude formelle entre (A.23) et (2.14) permettra d'étendre sans difficultés les méthodes que nous avons développées dans le cas classique au problème quantique correspondant; en outre, dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, on retrouve immédiatement l'expression classique.

En particulier, on voit immédiatement que l'équation (A.23) est invariante dans la transformation:

$$(A.25) \quad t \rightarrow -t, \quad P \rightarrow -P$$

ainsi que nous l'avons indiqué dans le texte.

Finalement, il est intéressant de noter que l'invariance de l'équation (A.23) par rapport à la transformation (A.25) est entièrement équivalente à la formulation usuelle du « time-reversal » sur l'équation de Schrödinger [12]. En effet, on démontre facilement que l'équation de Schrödinger *pour la fonction d'onde* $\Psi(r; t)$:

$$(A.26) \quad i\hbar\partial_t\Psi(r; t) = H\Psi(r; t)$$

est invariante par rapport à l'opération de renversement du temps *plus* conjugaison complexe, pourvu que l'Hamiltonien soit réel (ce qui est le cas que nous avons considéré ici):

$$(A.27) \quad t \rightarrow -t, \quad \Psi \rightarrow \Psi^*$$

On a donc:

$$(A.28) \quad i\hbar\partial_t\Psi^*(r, -t) = H\Psi^*(r, -t)$$

Si on se rappelle que, pour un cas pur, la matrice densité en représentation des positions s'écrit:

$$(A.29) \quad \varrho(r, r'; t) = \Psi(r; t)\Psi^*(r'; t)$$

l'équation de von Neumann (A. 19) devient (en représentation ordinaire)

$$(A.30) \quad i\hbar\partial_t\varrho(r, r'; t) = H(r)\varrho(r, r'; t) - H(r')\varrho(r, r'; t)$$

Cette dernière expression est également invariante vis-à-vis de la transformation renversement du temps-conjugaison complexe c'est-à-dire

$$(A.31) \quad i\hbar\partial_t\tilde{\varrho}(r, r'; t) = H(r)\tilde{\varrho}(r, r'; t) - H(r')\tilde{\varrho}(r, r'; t)$$

où nous avons posé:

$$(A.32) \quad \tilde{\varrho}(r, r'; t) = \varrho^*(r, r'; -t)$$

Pour démontrer l'équivalence entre (A.25) et (A.27), il suffit de vérifier que les transformations (A.32) et (6.27) sont identiques. Pour démontrer cette propriété, nous transformons

(A. 32) dans la représentation des ondes planes et nous obtenons aisément:

$$(A.33) \quad \langle k | \tilde{\varrho}_t | k' \rangle = \langle -k | \varrho_{-t} | -k' \rangle^*$$

Il suffit de se rappeler que pour un cas pur:

$$(A.34) \quad \langle k | \varrho | k' \rangle = \langle k | \Psi \rangle \langle \Psi | k' \rangle$$

pour vérifier immédiatement que (A.33) peut s'écrire:

$$(A.35) \quad \langle k | \tilde{\varrho}_t | k' \rangle = \langle -k' | \varrho_{-t} | -k \rangle$$

ou encore

$$(A.36) \quad \tilde{\varrho}_k(P; t) = \varrho_k(-P; -t)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Sui fondamenti della meccanica statistica.

Riassunto. — *Vedi Introduzione.*

§ I. — INTRODUZIONE.

I fondamenti della Meccanica Statistica costituiscono argomento troppo vasto perchè io possa parlarne adeguatamente nel breve lasso di tempo concessomi. Mi trovo pertanto costretto a limitare il campo delle mie considerazioni.

Anzitutto non mi occuperò dell'aspetto quantistico della Meccanica Statistica, ma soltanto dell'aspetto classico. E tra i fondamenti classici mi limiterò a trattare del problema ergodico, che è il primo grande problema che si pone nella costruzione della Meccanica Statistica. Tuttavia anche la trattazione del problema ergodico può al giorno d'oggi essere svolta secondo diversi punti di vista [I]. Ma dato il carattere della presente conferenza, che viene ad inserirsi nelle manifestazioni in onore di Lagrange, io illustrerò quel particolare aspetto del problema ergodico in cui i sistemi della Meccanica Statistica vengono considerati come sistemi meccanici e in cui l'obiettivo, reale o illusorio che esso sia, consiste nell'innestare la Meccanica Statistica classica sulle basi stesse della Meccanica Razionale. Perciò il concetto di « probabilità » sarà escluso dalle mie considerazioni.

§ 2. — LO SPAZIO DELLE FASI.

Vogliamo brevemente richiamare la rappresentazione matematica dei sistemi considerati dalla Meccanica Statistica.

Secondo la Fisica classica il numero f dei gradi di libertà di una molecola è 3 se essa è monoatomica, 5 se biatomica,

	f	n
monoatomica	3	$3N$
biatomica	5	$5N$
poliatomica	6	$6N$

6 se poliatomica. Ciò significa che per rappresentare la posizione nello spazio di una molecola monoatomica, assimilabile a un punto materiale, occorrono 3 coordinate, ne occorrono 5 per rappresentare la posizione e la disposizione nello spazio di una molecola biatomica, ne occorrono 6 per una poliatomica.

Pertanto il numero n di coordinate q_i che si richiedono per rappresentare la configurazione nello spazio di un gas costituito da N molecole omogenee è $3N$ se il gas è monoatomico, $5N$ se biatomico, $6N$ se poliatomico.

Le coordinate q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) possono essere scelte nel modo più generale possibile, possono cioè essere *coordinate lagrangiane*. Se volessimo rappresentare a un certo istante t non solo la configurazione del gas, ma anche il suo stato di moto, dovremmo dare oltre che le n coordinate q_i anche le loro n derivate rispetto al tempo $\dot{q}_i$ (*velocità lagrangiane*).

Tuttavia se la rappresentazione dei sistemi venisse fatta mediante le coordinate e velocità lagrangiane, lo sviluppo della M. S. diventerebbe troppo complicato dal punto di vista analitico.

Per rappresentare i sistemi meccanici si preferisce invece far ricorso alle *coordinate canoniche*, cioè alle coordinate lagrangiane q_i e ai *momenti coniugati* p_i , così definiti

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

essendo T l'energia cinetica del sistema.

Lo stato geometrico e cinematico di un sistema a un certo istante t è perciò rappresentabile mediante un punto di uno spazio euclideo a $2n$ dimensioni, lo spazio delle n coordinate lagrangiane q_i e degli n momenti coniugati p_i , cioè delle $2n$ coordinate canoniche. È tale spazio che prende il nome di *spazio delle fasi*.

Un punto di esso si chiama una *fase*. Una porzione τ di esso ha il volume

$$\int_{\tau} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

che prende anche il nome di estensione in fase.

È immediato verificare che il prodotto $p_i q_i$ ha le dimensioni fisiche di un'azione e che quindi l'estensione in fase ha le dimensioni della potenza n -esima di un'azione. Al fluire del tempo, per il continuo agitarsi delle molecole, il sistema considerato evolve. Il punto rappresentativo del sistema descrive una traiettoria nello spazio delle fasi. È tale traiettoria che descrive l'evoluzione del sistema.

In Meccanica Statistica quando si vuole studiare un certo sistema, si usa pensare a tante copie, a un numero infinito di copie del sistema in esame. Tali copie si intendono della stessa natura dell'originale, cioè esse sono uguali all'originale sia per quanto riguarda il numero delle molecole, sia per quanto riguarda la quantità delle molecole, sia per quanto riguarda il recipiente etc. Differiscono invece (a uno stesso istante) dall'originale per le posizioni delle molecole nello spazio e per la velocità delle molecole. Pertanto a uno stesso istante t queste infinite copie sono rappresentate nello spazio delle fasi da infiniti punti, la cui distribuzione nello spazio delle fasi è definita da una certa *funzione* $\rho(q_i, p_i, t)$ detta *densità in fase*. L'insieme dei punti rappresentativi ora considerati va sotto il nome di *insieme statistico*.

§ 3. — PROPRIETÀ DELLO SPAZIO DELLE FASI.

I sistemi di cui si occupa la Meccanica Statistica non sono necessariamente costituiti da gas di molecole, ma il suo oggetto è ben più vasto. Ciò che in Meccanica Statistica clas-

sica si richiede, si è che i sistemi fisici considerati ubbidiscano alle equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

con H non dipendente esplicitamente dal tempo.

Per tali sistemi sussistono due importantissime proprietà:

1) Un teorema (detto di Liouville) il quale assicura l'invarianza nel tempo dell'estensione in fase.

Si consideri cioè nello spazio delle fasi all'istante t una porzione V_t tutta riempita di punti rappresentativi. Tali punti vengono all'istante t' ad occupare un'altra porzione $V_{t'}$ dello spazio delle fasi. Ora il detto teorema asserisce che i volumi di V_t e di $V_{t'}$ sono uguali (conservazione della misura nel tempo):

$$m(V_t) = m(V_{t'}) .$$

Il numero N dei punti rappresentativi contenuti in V_t è uguale al numero N' dei punti rappresentativi contenuti in $V_{t'}$. Perciò la densità $\frac{N}{m(V_t)}$ è uguale alla densità $\frac{N'}{m(V_{t'})}$. La densità dei punti rappresentativi resta così costante lungo una traiettoria. È per tale motivo che tale teorema viene anche chiamato, secondo Gibbs [2], principio della conservazione della densità in fase.

2) L'invarianza dell'estensione in fase rispetto a una trasformazione di coordinate canoniche.

Si rappresenti un sistema fisico in due differenti spazi delle fasi, lo spazio delle vecchie coordinate canoniche (p_i, q_i) e lo spazio delle nuove coordinate canoniche (P_i, Q_i) . Ad ogni punto dello spazio (p_i, q_i) corrisponde un punto dello spazio (P_i, Q_i) la corrispondenza essendo definita in modo che i due punti (p_i, q_i) e (P_i, Q_i) definiscano lo stesso stato del sistema fisico in oggetto. Allora se si scelgono nei due differenti spazi due porzioni corrispondenti v e V , i volumi di esse sono uguali:

$$m(v) = m(V) .$$

L'importanza di tale proprietà risulterebbe ancor più se si considerassero le cose anche da un punto di vista quantistico. Si è detto infatti che l'estensione in fase ha le dimensioni fisiche della potenza di un'azione. Ora un'azione è sempre un multiplo intero del quanto elementare h di Planck.

§ 4. - EQUILIBRIO DEGLI INSIEMI STATISTICI NELLO SPAZIO DELLE FASI.

I sistemi di cui tratta la Meccanica Statistica sono conservativi (la funzione H non dipende esplicitamente dal tempo). Perciò il punto rappresentativo di un sistema descrive nello spazio delle fasi una traiettoria appartenente totalmente alla superficie

$$H(p_i, q_i) = \text{costante}.$$

Un insieme statistico si dice in equilibrio statistico quando la densità ϱ è indipendente dal tempo, cioè quando è $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$. Ora, dal principio di conservazione della densità di fase, si ha $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, cioè

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sum_i \frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial \varrho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right).$$

È ora evidente che per un insieme statistico in cui sia

$$\varrho = f(H)$$

la precedente fornisce $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$. Cioè l'insieme è in equilibrio statistico.

Fra gli insiemi in equilibrio statistico tre sono i più notevoli [3]:

a) l'insieme uniforme, definito dalla condizione $\varrho = \text{costante}$. Esso presenta scarso interesse, quantunque esso serva

a dimostrare che se l'insieme statistico parte da una distribuzione a densità costante, esso conserva la distribuzione a densità costante. Non esistono cioè nello spazio delle fasi regioni di preferenza in cui i punti si addensino maggiormente che in altre regioni.

b) l'insieme microcanonico: la densità ϱ è nulla in tutto lo spazio delle fasi salvo che in un sottilissimo strato in cui l'energia $H(p_i, q_i)$ del sistema è compresa fra $u - \delta$ e $u + \delta$, dove assume un valore (positivo) costante. Precisamente si ha:

$$\varrho(p_i, q_i) = \text{costante positiva quando } u - \delta \leq H(p_i, q_i) \leq u + \delta,$$

$$\varrho(p_i, q_i) = 0 \text{ quando } H(p_i, q_i) < u - \delta \text{ oppure } H(p_i, q_i) > u + \delta;$$

c) l'insieme canonico, introdotto da Gibbs e definito dalla relazione

$$\varrho = Ne^{\frac{\psi - H}{\theta}}$$

dove N , ψ e θ sono opportune costanti.

§ 5. - EQUILIBRIO STATISTICO DEI SISTEMI FISICI.

1. - Precedentemente si è trattato dell'equilibrio statistico degli insiemi statistici. Ora si tratterà dell'equilibrio statistico dei sistemi fisici che costituiscono l'oggetto della Meccanica Statistica (ad es. l'equilibrio statistico di un gas di molecole). Di un sistema in equilibrio, Boltzmann ha dato due definizioni [4]. Una definizione, che viene chiamata la seconda [5], è la seguente:

« Die Gleichgewichtseigenschaften eines Systems sind die über eine unendlich lange Zeit gebildeten Mittelwerte der betreffenden Eigenschaften ».

Lo studio dei sistemi in equilibrio ha pertanto come conseguenza la considerazione delle medie temporali delle grandezze $f(p_i, q_i)$ dipendenti dallo stato del sistema. Secondo l'intuizione del fisico è l'esistenza delle medie temporali che caratterizza l'equilibrio statistico di un sistema.

Al fluire del tempo, il punto rappresentativo del sistema descrive una traiettoria nello spazio delle fasi. D'ora innanzi si userà il simbolo x per indicare le $2n$ coordinate canoniche p_i, q_i che individuano lo stato del sistema all'istante t , si scriverà X per indicare le coordinate canoniche relative allo stato del sistema all'istante t_0 , si indicherà con T^t la legge di evoluzione del sistema, ossia la legge del moto del punto rappresentativo nello spazio delle fasi:

$$x = T^t X; \quad T^{t_0} = \mathbf{I}.$$

La media temporale $\hat{f}$ di una funzione $f(x)$ durante il moto è così definita:

$$(*) \quad \hat{f} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(T^\tau X) d\tau$$

Le proprietà matematiche delle medie di una funzione $f(t)$ della sola variabile t costituiscono l'oggetto di vari teoremi [6], [7]. Qui ci si limiterà a ricordarne uno, dovuto a N. Wiener, valido per la media $\bar{f}(t)$ definita simmetricamente:

$$\bar{f}(t) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s) ds.$$

Se:

a) $f(t) \in L[a, b]$ in ogni intervallo $[a, b]$ finito,

b) $f(t)$ è limitata almeno da una parte, vale a dire se si ha:

$$f(t) \geq m \quad , \quad \text{per} \quad -\infty < t < +\infty$$

o

$$f(t) \leq M \quad \text{per} \quad -\infty < t < +\infty$$

c) $\bar{f}(0)$ esiste

allora

$$\bar{f}(t) \text{ esiste per ogni } t$$

e

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(0) = \text{costante}.$$

2. - Nella Meccanica Statistica il calcolo di una media temporale $\bar{f}$ presuppone la conoscenza della legge del moto T^2 del sistema fisico in oggetto, cioè presuppone l'integrazione del sistema di equazioni differenziali che ne reggono il comportamento. Ora tale integrazione; a motivo del numero enorme di particelle che costituiscono i sistemi considerati in Meccanica Statistica, è praticamente impossibile.

Esistono invece altre medie di calcolo molto più semplice, quali la media di fase, introdotta da Maxwell e chiamata da Gibbs media microcanonica, e la media canonica, introdotta da Gibbs. Qui ci si limiterà a considerare soltanto la prima. Nello spazio delle fasi sia $S_\delta[u]$ uno strato di spessore 2δ racchiudente nel suo interno la superficie $H(x) = u$ sulla quale l'energia ha il valore costante u . Più precisamente $S_\delta[u]$ sia l'insieme dei punti x dello spazio delle fasi così definito:

$$S_\delta[u] = \{x : |H(x) - u| \leq \delta\}.$$

Sia $mS_\delta[u]$ la misura dello strato $S_\delta[u]$. Allora la media di fase $\bar{f}$ di una funzione $f(x)$ definita in $S_\delta[u]$ ed ivi integrabile è così definita:

$$(*) \quad \bar{f} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\delta[u]} f(x) dm}{m(S_\delta[u])}.$$

Se $H(x)$ è di tale natura che le superfici $H(x) = \text{costante}$ possano essere assunte come costituenti una famiglia di superfici coordinate, come è il caso per le funzioni quadratiche dell'energia che si presentano nei problemi fisici, allora il limite precedente può essere valutato e si ha:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Omega(u)} \int_{H=u} \frac{f(x) dS}{\text{grad } H}$$

essendosi posto

$$\Omega(u) = \int_{H=u} \frac{dS}{\text{grad } H} \quad \text{grad } H = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^2}$$

ed essendo dS l'area dell'elemento della superficie $H = u$.

§ 6. — IL PROBLEMA ERGODICO.

Come abbiamo visto le funzioni f di cui in Meccanica Statistica si intende calcolare la media sono funzioni dello stato x del sistema, cioè di tutte le coordinate canoniche. Per calcolare la media temporale $\hat{f}$ si integra la funzione f nell'insieme di stati che vengono via via assunti dal sistema durante la sua evoluzione nel tempo. Evidentemente tali stati, trattandosi di un sistema conservativo, corrispondono tutti allo stesso valore u dell'energia del sistema. Invece, per il calcolo della media microcanonica $\bar{f}$, la funzione $f(x)$ viene integrata sulla superficie $H = u$, cioè nell'insieme di tutti gli stati che il sistema può assumere compatibilmente con la condizione $H(x) = u$. Ora nella Meccanica Statistica la difficoltà menzionata al § 5, n. 2 e relativa al calcolo della media temporale viene superata assumendo questa uguale alla media microcanonica

$$(*) \quad \hat{f} = \bar{f}.$$

In tale assunto consiste l'essenza stessa della Meccanica Statistica. Ma evidentemente esso pone un'enorme questione, relativa alla sua legittimità. In ciò consiste il *problema ergodico*.

Si apre così una speculazione scientifica che iniziata da Boltzmann (1871) e da Maxwell (1873) non è ancora conclusa. In tale speculazione io penso di ravvisare quattro fasi relative all'evoluzione subita dal problema ergodico nel suo processo storico, evoluzione in buona parte determinata dal progresso continuo e parallelo delle scienze matematiche in genere.

§ 7. — LA PRIMA VERSIONE DEL PROBLEMA ERGODICO.

L'IPOTESI ERGODICA.

Più dello scritto di Boltzmann [8], in cui affiora per la prima volta il problema ergodico, è interessante quello di Maxwell [9], per il complesso delle argomentazioni di ordine fisico con le quali egli tende, se non a giustificare, almeno a

rendere plausibile quella che fu poi chiamata *l'ipotesi ergodica*. Ecco la traduzione del passo maxwelliano in questione:

« Il semplice assunto che è necessario per la dimostrazione diretta (della legge di Boltzmann) è che il sistema, se lasciato libero nel suo stato reale di moto, passerà, tosto o tardi, per ogni fase compatibile con l'equazione dell'energia.

Ora è manifesto che vi sono casi in cui ciò non ha luogo. Il moto di un sistema, non soggetto a forze esterne, soddisfa ad altre sei equazioni, oltre all'equazione dell'energia ⁽¹⁾, cosicchè il sistema non può passare per quelle fasi che, quantunque soddisfacenti all'equazione dell'energia, non soddisfano alle altre sei equazioni.

Ancora, possonvi essere particolari leggi di forza, come per esempio quella secondo cui le particelle interagiscono fra loro con forze proporzionali alla loro distanza, per le quali l'intero moto ripete sè stesso dopo un tempo finito. In tali casi un valore particolare di una variabile corrisponde a un particolare valore di ciascuna delle altre variabili, cosicchè fasi formate da sistemi di valori delle variabili che non si corrispondono non possono presentarsi, anche se esse soddisfano alle sette equazioni generali.

Ma se noi supponiamo che le particelle materiali, o alcune di esse, incontrino di quando in quando un ostacolo fisso, come le pareti di un vaso contenente le particelle, allora, eccetto per speciali forme della superficie di questo ostacolo, ogni incontro introdurrà una perturbazione nel moto del sistema, cosicchè esso passerà da una traiettoria non perturbata ad un'altra. Le due traiettorie devono entrambe soddisfare all'equazione dell'energia, ed esse devono intersecarsi nella fase per la quale le condizioni dell'urto contro l'ostacolo fisso sono soddisfatte, ma esse non sono soggette alle equazioni della quantità di moto. È ben difficile in un caso di una tale estrema

(1) Cioè alle tre equazioni cartesiane che esprimono la conservazione della quantità di moto del sistema e alle tre equazioni cartesiane relative alla conservazione del momento della quantità di moto.

complessità pervenire a una conclusione soddisfacente in generale, tuttavia noi possiamo con considerevole fiducia asserire che eccetto per particolari forme della superficie dell'ostacolo fisso, il sistema passerà, tosto o tardi, dopo un sufficiente numero di urti, attraverso ogni fase compatibile con l'equazione dell'energia ».

Così scriveva Maxwell nel 1873. All'ipotesi che il punto rappresentativo del sistema passi per ogni fase compatibile con l'equazione dell'energia si è dato il nome di *ipotesi ergodica*. Mediante tale ipotesi e mediante alcune considerazioni sui tempi di soggiorno del punto rappresentativo nelle cellette elementari dello spazio delle fasi (in tali considerazioni si ricorreva al teorema di Liouville), si mirava a giustificare l'uguaglianza delle medie temporali con le medie di fase.

§ 8. — LA SECONDA VERSIONE. L'IPOTESI QUASI ERGODICA.

1. — Sulla superficie $H = \text{costante}$ il punto rappresentativo del sistema descrive una curva continua, priva di punti multipli, a causa dei teoremi di esistenza e di unicità degli integrali delle equazioni di Hamilton. Ora l'ipotesi ergodica pretende che una siffatta curva copra tutti i punti della superficie $H = \text{costante}$.

Al giorno d'oggi qualunque analista si rende immediatamente conto dell'assurdità di una tale ipotesi. Ma non bisogna dimenticare l'epoca in cui essa è stata formulata. La teoria della misura non era allora ancora nata, in quanto che essa comincia a svilupparsi soltanto agli albori di questo secolo, con l'avvento dell'integrale di Lebesgue. Quantunque l'ipotesi ergodica, ancor prima di essere definitivamente abbandonata, avesse dato luogo a qualche riserva, è soltanto nel 1913, per merito di Rosenthal [10] e di Plancherel [11], che si riesce a dimostrarne l'assurdità con procedimenti matematici rigorosi, fondati sulla teoria della misura.

Ecco allora i fisici ripiegare su un'altra ipotesi, l'*ipotesi quasi ergodica*, che era stata avanzata già qualche tempo prima (1911) da P. e T. Ehrenfest nel loro famoso articolo dell'Enzy-

klopädie der mathematischen Wissenschaften [12]. Secondo tale ipotesi si ammette che sulla superficie $H = \text{costante}$ il punto rappresentativo di un sistema passi, in un futuro più o meno lontano, vicino quanto si vuole ad ogni punto prefissato, senza necessariamente attraversarlo.

2. — Con l'interessamento di alcuni eminenti matematici e di illustri fisici teorici per i fondamenti della Meccanica Statistica viene sempre più maturando l'esigenza di porre la Meccanica Statistica su solide basi razionali e di approfondire maggiormente lo studio dei sistemi fisici che ne costituiscono l'oggetto. Sono essi quasi ergodici?

Una risposta a tale questione è venuta da parte di Fermi, il quale è riuscito a dimostrare la quasi-ergodicità dei sistemi canonici normali [13]. Per avere un'idea di cosa sia un sistema canonico normale, si pensi ad es. al problema ridotto dei tre corpi, già considerato dal Poincaré nella sua famosa opera « *Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste* » [14].

Tuttavia gli studiosi sembrano discordi sul valore del teorema di Fermi. Così Münster nel suo articolo in « *Handbuch der Physik* » dà ampio rilievo al teorema di Fermi e ne riporta gran parte della dimostrazione [5]. Invece nel corso tenuto recentemente a Varenna da Truesdell [15] il teorema di Fermi è appena degnato di una citazione a piè di pagina.

Indubbiamente la formulazione e la dimostrazione del teorema di Fermi sono legate ai metodi introdotti dal Poincaré per lo studio dei problemi della dinamica analitica, metodi da lui illustrati nell'opera citata e sui quali ritorneremo verso la fine di questa conferenza, mostrando come essi siano insufficienti a rispondere alle grandiose esigenze poste dal problema ergodico.

§ 9. — LA TERZA VERSIONE.

L'IPOTESI DELLA TRANSITIVITÀ METRICA.

1. — Intorno al 1931-1932 il problema ergodico subì una ulteriore evoluzione, per merito soprattutto di Birkhoff (teorema ergodico individuale) [16] e di von Neumann (teorema

ergodico medio) [17]. Si troverà nell'opera classica di Hopf [18], con una bibliografia molto completa fino al 1937, un'esposizione molto particolareggiata del capitolo matematico che ne è scaturito e che, secondo taluni, è considerato una delle più importanti acquisizioni delle matematiche pure di questi ultimi decenni.

Allo scopo di illustrare l'interesse che il teorema di Birkhoff riveste per la Meccanica Statistica, premettiamo alcune osservazioni.

Sia τ un intervallo di tempo. Si osservi che per le equazioni di Hamilton sussistono teoremi di esistenza ed unicità. Ne viene che se all'istante t il sistema fisico si trova in uno stato rappresentato dal punto X dello spazio delle fasi, all'istante $t + \tau$ esso si trova in uno stato rappresentato dal punto $x = T^\tau X$ dello spazio delle fasi. In tal modo è possibile far corrispondere ad ogni punto X un punto x dello spazio delle fasi in modo biunivoco. Si ottengono così tante trasformazioni dello spazio delle fasi in sè stesso, ogni trasformazione corrispondendo ad un particolare valore del parametro τ . Tali trasformazioni costituiscono evidentemente un gruppo abeliano

$$T^{\tau'}(T^{\tau''}X) = T^{\tau''}(T^{\tau'}X).$$

Un'altra notevole proprietà di tali trasformazioni è quella di conservare la misura, in conseguenza del teorema di Liouville.

Ciò premesso risulta chiaro il significato che per la Meccanica Statistica riveste il seguente teorema individuale di Birkhoff.

Sia:

1) (Γ, S, μ) uno spazio di probabilità ⁽²⁾;

2) G un gruppo abeliano di trasformazioni T^t di Γ in sè stesso conservanti la misura:

$$\mu(T^t A) = \mu(A) \quad \text{per ogni } A \in S \quad \text{e per ogni } t$$

⁽²⁾ Non esiste alcuna contraddizione con quanto dichiarato nell'introduzione; che qui si parli di « probabilità » è circostanza puramente fortuita, dovuta all'uso da parte dei matematici puri del termine « probabilità » anche là ove si tratta soltanto di teoria della misura.

e soddisfacenti alla condizione di regolarità seguente: $\mu(A \cap T^t B)$ è una funzione misurabile di t per ogni A e B ;

3) $f(X)$ una funzione a valori reali o complessi su Γ e integrabile rispetto alla misura μ : $f(X) \in L(\Gamma)$.

Allora la media temporale $\hat{f}$ (calcolata lungo la traiettoria $T^t X$ determinata da un punto X) esiste, salvo forse al più per un insieme di punti X di misura nulla. In generale $\hat{f}$ dipende da X ; si ha $\hat{f} \in L(\Gamma)$ e

$$\int_{\Gamma} \hat{f} d\mu = \int_{\Gamma} f(X) d\mu \quad \text{ossia} \quad \bar{\hat{f}} = \bar{f}.$$

Se il gruppo abeliano G possiede la transitività metrica (vale a dire se gli insiemi invarianti rispetto alla trasformazione T^t hanno tutti per misura 0 o 1), la media temporale ha lo stesso valore per tutte le traiettorie $T^t X$ (per quasi ogni X) e questo valore indipendente da X è uguale alla media di fase:

$$\hat{f} = \bar{f}.$$

Appare così un nuovo concetto, quello della transitività metrica.

Detto in parole più semplici e con riferimento alla Meccanica Statistica, il gruppo delle trasformazioni T^t operanti sui punti rappresentativi situati sulla superficie $H = \text{costante}$ gode della transitività metrica quando non è possibile scomporre la superficie in due parti (ciascuna dotata di misura non nulla) costituite ciascuna da traiettorie complete.

Tale concetto, al suo apparire, ha suscitato ricerche anche nel campo delle matematiche pure, allo scopo di stabilire se esso era accettabile o autocontraddittorio, come già accaduto per la primitiva ipotesi ergodica. Va qui ricordata una ricerca di Oxtoby e Uelam [19], i quali hanno dimostrato la possibilità della transitività metrica su una certa classe di superfici poliedriche.

Qui ci limitiamo ad osservare come la transitività metrica sia non solo sufficiente ma anche necessaria affinché sia $\hat{f} = \bar{f}$

per qualunque $f(X) \in L(\Gamma)$. Si supponga infatti che l'insieme Γ possa scomporsi in due insiemi Γ_1 e Γ_2 di misura a e b rispettivamente ($a \neq 0$, $b \neq 0$), essendo Γ_1 e Γ_2 entrambi invarianti rispetto alla trasformazione T^t :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Sia $\alpha(X)$ una funzione definita in Γ nel seguente modo:

$$\alpha(X) = 1 \text{ su } \Gamma_1 \quad \alpha(X) = 0 \text{ su } \Gamma_2.$$

Allora, poichè tanto Γ_1 quanto Γ_2 constano di traiettorie complete, si ha:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(X) &= 1 & (X \in \Gamma_1) \\ \hat{\alpha}(X) &= 0 & (X \in \Gamma_2) \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_{\Gamma} \alpha(X) dm}{m(\Gamma)} = \frac{\int_{\Gamma_1} dm}{a + b} = \frac{a}{a + b}$$

d'onde la necessità della transitività metrica affinchè sia $\hat{f} = \bar{f}$ per ogni $f \in L(\Gamma)$.

2. — Qualche autore nel trattare del contributo di Birkhoff e di von Neumann allo studio del problema ergodico usa l'espressione di *risoluzione del problema ergodico*.

Ora l'uso di espressioni non appropriate ha il solo risultato di creare confusione di idee. Il grande merito dei predetti Autori consiste nello studio analitico da essi compiuto del problema ergodico, nelle relazioni matematiche che hanno stabilite, nei concetti matematici nuovi da essi inventati, cioè nell'aver creato un felice strumento matematico particolarmente adatto per l'analisi di alcuni aspetti del problema ergodico. In seguito ai loro studi il problema ergodico entra in una nuova fase. Secondo un'affermazione di Birkhoff e Koopman [20]: «l'ipotesi quasi ergodica è stata sostituita dalla sua versione moderna: l'ipotesi della transitività metrica».

3. — E qui allora il problema ergodico risorge nella seguente forma: Per i sistemi della Meccanica Statistica vale l'ipotesi della transitività metrica?

Qui ci limiteremo a illustrare alcune difficoltà.

a) Si supponga che accanto all'integrale dell'energia esista un altro integrale del moto $G(x) = v$, integrale che ovviamente si suppone indipendente da quello dell'energia e che può anche essere del tutto sconosciuto. In tal caso i punti della superficie $H(x) = u$ (u e v costanti) possono essere divisi in due insiemi Γ_1 e Γ_2 formati il primo dalle traiettorie in cui è $G(x) < a$, il secondo dalle traiettorie in cui è $G(x) \geq a$. L'esistenza, nota o no, di un altro integrale primo del moto oltre a quello dell'energia fa cadere l'ipotesi della transitività metrica e toglie quindi la certezza dell'uguaglianza delle medie temporali con le medie di fase. L'unicità dell'integrale dell'energia si presenta come condizione necessaria per la validità dell'ipotesi della transitività metrica.

b) Ma anche se si sapesse che oltre all'integrale dell'energia non esistono altri integrali primi del moto, l'ipotesi della transitività metrica sarebbe essa soddisfatta?

4. - È del tutto naturale che di fronte alle immani difficoltà che sempre si paravano dinnanzi nonostante la crescente complessità dei metodi matematici rivolti allo studio del problema ergodico alcuni insigni fisici, quali il Tolman [3] e il Fowler [21] siano insorti, propugnando l'idea che le basi assiomatiche della Meccanica Statistica debbano essere completamente indipendenti dalla teoria ergodica. Tolman ad es. fonda la sua trattazione sul postulato della equiprobabilità a priori (assegnazione di probabilità uguali a porzioni di misura uguale dello spazio delle fasi).

§ 10. - LA QUARTA VERSIONE.

IPOTESI DELL'UNICITÀ DELL'INTEGRALE DELL'ENERGIA.

1. - Tuttavia la presa di posizione del Tolman e del Fowler non è valsa a distogliere gli studiosi dalla suggestione esercitata dal problema ergodico, alla cui comprensione è stato recentemente (1960) apportato un prezioso contributo da parte di Lewis [22].

Due teoremi ha sostanzialmente stabilito il Lewis, uno relativo alle medie microcanoniche e uno alle medie canoniche. Tali teoremi sono di semplice fattura, ma originali come contenuto. Qui ci limiteremo a esporre, se pur nelle sue grandi linee, la dimostrazione del primo teorema, quello relativo alle medie di fase, perchè tanto basta per comprendere la trasformazione che per opera di Lewis viene a subire il problema ergodico.

2. - Se $y(x) = \text{costante}$ è un integrale per quasi tutte le traiettorie, cioè se $y(T^t x) = y(x)$ q.d., si dirà che la funzione y è un invariante del moto T^t . È inoltre chiaro che nei problemi di interesse fisico, vi sarà un numero massimo di invarianti misurabili indipendenti. Noi ammetteremo che esista un sistema (in numero finito) di invarianti

$$(\cdot) \quad \vec{y}\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$$

tali che ogni invariante misurabile del moto sia funzione di essi; cioè se z è un invariante, allora è $z = Z(\vec{y}(x))$ q. d., dove Z è funzione misurabile secondo Borel. Un sistema di funzioni $\vec{y}$ di questa specie sarà chiamato un invariante completo del moto.

Sia ora f una funzione del punto x soddisfacente alle sole condizioni perchè ad essa possa essere applicata la prima parte del teorema di Birkhoff (cioè si considera l'enunciato di cui al § 9, n. 1 fino alla conclusione $\bar{f} = \bar{f}$; si fa esplicitamente notare che nella dimostrazione del teorema di Lewis non si fa ricorso alla seconda parte del teorema di Birkhoff, cioè all'ipotesi della transitività metrica). La (*) del § 5, n. 1 permette allora di associare ad ogni punto x dello spazio delle fasi (il punto corrispondente al primo estremo t_0 dell'intervallo di integrazione) un valore $\hat{f}$, che per il teorema di Birkhoff esiste quasi dappertutto ed è costante lungo la traiettoria. Perciò $\hat{f}$ è un invariante del moto e quindi per quanto detto si può scrivere

$$\hat{f} = F(\vec{y}(x)) \quad \text{q.d. .}$$

Il problema che ora si pone è quello di determinare la funzione F .

Intanto, per l'enunciato teorema di Birkhoff, se A è una qualunque parte invariante misurabile di Γ e se $m(A) < +\infty$, si ha

$$\int_A \hat{f} dm = \int_A f dm.$$

Ora se B è un qualunque sistema boreliano in R^k , si ha che $\vec{y}^{-1}(B)$ è misurabile e poichè le y_i sono invarianti, esso differisce da un sistema invariante per uno di misura nulla. Di qui, per le precedenti, si ha

$$\int_{\vec{y}^{-1}(B)} F(y(x)) dm = \int_{\vec{y}^{-1}(B)} \hat{f} dm = \int_{\vec{y}^{-1}(B)} f dm.$$

Si tratta ora di trasformare il primo integrale da un insieme dello spazio Γ a un insieme di R^k . Si osservi a tale proposito che la misura m usata in Γ induce una misura M in R^k :

$$M(B) = m(\vec{y}^{-1}(B))$$

dove B è un qualunque sistema boreliano in R^k . Per una F misurabile secondo Borel si ha allora

$$\int_{\vec{y}^{-1}(B)} F(\vec{y}(x)) dm = \int_B F(\vec{y}) dM.$$

Dal confronto con le precedenti si ha così

$$\int_B F(\vec{y}) dM = \int_{\vec{y}^{-1}(B)} f dm.$$

Così si è trovato l'integrale di F in un arbitrario boreliano di R^k . Per trovare la F basta derivare in senso generalizzato. A tale scopo posto

$$I_\delta[\vec{u}] \equiv \{y_i : |y_i - u_i| \leq \delta\}$$

si ha

$$F(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{I_\delta[\vec{u}]} F dM}{M(I_\delta[\vec{u}])} \quad \text{q.d.}$$

In forza delle precedenti tale espressione può essere trasformata in termini di integrazione in Γ e si ha

$$F(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\delta[\vec{u}]} f dm}{m(S_\delta[\vec{u}])} \quad \text{q.d.}$$

dove

$$S_\delta[\vec{u}] \equiv \overline{y^{-1}}(I_\delta[\vec{u}]) = \{x : |y_i(x) - u_i| \leq \delta\}.$$

Si faccia ora $\vec{u} = \vec{y}(x)$ e inoltre si ponga

$$(\cdot) \quad \bar{f}(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\delta[\vec{u}]} f dm}{m(S_\delta[\vec{u}])}.$$

Allora da tutte le precedenti si deduce

$$\hat{f}(y^{-1}(\vec{u})) = \bar{f}(\vec{u}) \quad \text{q.d.}$$

In tale risultato consiste il primo teorema di Lewis.

3. - Allo scopo di commentarne il senso fisico, esaminiamo le relazioni $(\cdot)$ e $(:)$. Se l'invariante completo fosse costituito dal solo integrale dell'energia, cioè nella $(\cdot)$ fosse $k = 1$, $H(x) = y_1(x)$, la $(:)$, per il significato che ora verrebbe ad assumere $S_\delta[\vec{u}]$ uguale a quello riportato al § 5, n. 2, si ridurrebbe alla $(*)$ dello stesso paragrafo, cioè alla maxwelliana media di fase, o media microcanonica. Invece la $(:)$ costituisce una nuova specie di media di fase, nella quale il moto del sistema viene considerato ubbidire non solo all'integrale dell'energia, ma a tutti gli integrali primi del moto costituenti un invariante completo. Per tale motivo alla media $f(\vec{u})$ delle $(\cdot)$ e $(:)$ viene dato il nome di media pantamicrocanonica. Con ciò il primo teorema di Lewis mostra che la media temporale $\hat{f}$ calcolata su una traiettoria lungo la quale l'integrale completo $\vec{y}(x)$ assume il valore costante $\vec{u}$ (cioè i k integrali $y_i(x)$ assumono i valori costanti u_i) è uguale alla media pantamicrocanonica $\bar{f}(\vec{u})$. In particolare dal teorema di Lewis discende che se l'integrale dell'energia costituisce da solo un invariante completo, la media temporale $\hat{f}$ uguaglia la media microcanonica $\bar{f}$ q.d.

Come già osservato, la dimostrazione del teorema di Lewis fa ricorso soltanto alla prima parte del teorema di Birkhoff. Non fa ricorso all'ipotesi della transitività metrica. Mentre il Birkhoff per giungere all'uguaglianza fra le medie temporali e le medie di fase deve introdurre l'ipotesi della transitività metrica, il Lewis mostra che per arrivare a calcolare le medie temporali mediante operazioni da eseguirsi nello spazio delle fasi basta conoscere un integrale completo. Cioè a un concetto topologico, quale la transitività metrica, viene qui sostituito un concetto squisitamente meccanico, l'invariante completo del moto. Con il teorema di Lewis il problema ergodico viene pertanto trasferito nell'ambito della Meccanica Analitica. E poichè secondo il teorema di Lewis quando l'integrale dell'energia costituisce da solo un invariante completo la media temporale uguaglia la media microcanonica, il problema ergodico assume il seguente altro aspetto: Quali sono gli invarianti completi dei sistemi meccanici che costituiscono l'oggetto della Meccanica Statistica? In particolare ed avuto riguardo al più generale sistema della Meccanica Statistica, l'integrale dell'energia è l'unico integrale primo del moto?

Abbiamo così una nuova versione del problema ergodico, la quarta in ordine di tempo (1960).

§ II. — LA QUESTIONE DELL'UNICITÀ DELL'INTEGRALE DELL'ENERGIA.

1. — Nella sua famosa opera « Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste » H. Poincaré dedica un grande capitolo all'inesistenza di integrali uniformi del moto [14], all'infuori di quello dell'energia. Il celebre teorema di Poincaré è stato poi esteso da Painlevé [23]. Se il risultato stabilito da Poincaré avesse carattere generale, il problema ergodico, nella sua quarta versione, risulterebbe risolto. Purtroppo le cose non stanno così, a causa delle numerose ipotesi sulle quali si fonda la dimostrazione del Poincaré e che limitano fortemente la portata delle conclusioni.

Infatti Poincaré studia sistemi dinamici retti dalle equazioni (Vol. I, n. 13)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

supponendo che la funzione H possa svilupparsi secondo le potenze di un parametro molto piccolo μ nella maniera seguente

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots$$

Egli suppone in più che H_0 dipenda soltanto dalle q_i e che sia indipendente dalle p_i e che $H_1, H_2, \dots$ siano delle funzioni periodiche di periodo 2π nelle p_i .

A una siffatta impostazione il Poincaré perviene dopo un'analisi del problema dei tre corpi e in seguito a una trasformazione di coordinate. Tuttavia il teorema sull'unicità dell'integrale dell'energia, quale integrale uniforme del moto, viene dal Poincaré assicurato per un numero qualunque di variabili. Poincaré ricerca gli integrali uniformi Φ nella classe di quelli sviluppabili in serie del parametro μ

$$\Phi = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots$$

con Φ_0 indipendente dalle p_i e $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ periodici rispetto alle p_i con periodo 2π . Sotto tali condizioni egli dimostra che, a parte casi eccezionali, l'unico integrale uniforme è $H = \text{costante}$.

2. — Allo scopo di mettere in guardia contro l'uso indiscriminato che veniva talvolta fatto del teorema di Poincaré, T. M. Cherry ha eseguito alcune ricerche di carattere critico [24]. Egli prova che, se l'hamiltoniano H è analitico nelle $2n$ variabili p_i e q_i , vi sono sempre $2n - 1$ integrali analitici ed indipendenti dal tempo in prossimità di ogni punto ordinario; in generale esistono sempre $2n - 2$ integrali soddisfacenti a tutte le condizioni richieste da Poincaré eccetto che di essere ana-

litici nel parametro (evidentemente i due risultati ora menzionati si accordano con il fatto che Poincaré trovi un solo integrale analitico nel parametro, l'integrale $H = \text{costante}$).

Nel caso di un punto singolare, Cherry ha costruito formalmente integrali non analitici in numero dipendente dalla natura della singolarità.

Tali risultati fanno pensare che il teorema di Poincaré non abbia validità generale. Invece secondo altri studiosi i risultati di Cherry non sono da considerarsi preoccupanti. Vogliamo ad esempio citare l'opinione di Truesdell in proposito [15]:

« Mentre questi risultati sono sufficienti a dimostrare che il teorema di Poincaré non offre una giustificazione per trascurare gli integrali salvo quello dell'energia, essi non offrono nulla di costruttivo. Ciò perchè essi sono teoremi locali, mentre, come chiaramente osserva Maxwell, soltanto integrali *validi in tutto lo spazio delle fasi* sono di qualche utilità in M. S. ». Ed egli, dopo varie congetture, finisce per concludere che « le speranze di stabilire il carattere ergodico dei risultati classici mediante il solo integrale dell'energia non sono perdute ».

Va tuttavia notato che recentemente Prigogine e Rembols [25] hanno dimostrato che se il sistema fisico è infinitamente esteso il moto ammette infiniti integrali primi. In seguito a tale fatto l'unico elemento che tenga in vita la speranza di assicurare l'unicità dell'integrale dell'energia è costituito dalle pareti del recipiente racchiudente il gas considerato (oltre che dal numero finito dei gradi di libertà del sistema). Gli urti contro le pareti del recipiente dovrebbero provocare la saltuaria rottura delle costanti del moto e quindi distruggere in sul nascere la formazione di integrali primi ad eccezione di quello dell'energia.

Come si vede l'evoluzione del problema ergodico nel tempo si svolge lungo un arco che si chiude su una posizione che non differisce di molto da quella originaria maxwelliana, se pur i due modi di riguardare il problema, quello di Maxwell e quello

moderno, differiscono alquanto per la grande conoscenza critica della questione acquisita dagli studiosi di oggi, dovuta ai grandi contributi analitici che allo studio di essa sono stati apportati dai tempi di Maxwell ai nostri giorni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] KHINCHIN A. I., *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, Dover Publications, New York (1949).
- [2] GIBBS J. W., *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, New Haven (1902), oppure *Collected Works*, vol. II, New Haven (1948), oppure trad. francese, *Principes Élémentaires de Mécanique Statistique*, Hermann, Paris (1926).
- [3] TOLMAN R. C., *The Principles of Statistical Mechanics*, London (1938).
- [4] BOLTZMANN L., «Wien. Ber.», **76**, 373 (1877) e **58**, 517 (1868).
- [5] MÜNSTER A., *Prinzipien der Statistischen Mechanik*, «Handbuch der Physik», Band III/2 (*Prinzipien der Thermodynamik und Statistik*), Berlin (1959).
- [6] PLANCHEREL M. e POLYA G., *Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles définies pour toutes les valeurs de la variable*, «Commentarii Mathematici Helvetici», **3** (1931), pp. 114-120.
- [7] WIENER M., *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge University Press (1932), p. 155.
- [8] BOLTZMANN L., «Akad. Wien. Sitz.», **63**, 679 (1871), «Abh.» **1**, 259 e **58**, 517 (1868), «Abh.» **1**, 49.
- [9] MAXWELL J. C., «Proc. Camb. Phil. Soc.», **12**, 547 (1879), «Papers» **2**, 713.
- [10] ROSENTHAL A., «Ann. d. Physik», **42**, 796 (1913).
- [11] PLANCHEREL M., «Ann. d. Physik», **42**, 1061 (1913).
- [12] EHRENFEST P. e T., «Eur. Math. Wiss.», **440**, 90 (1911).
- [13] FERMI E., «Physical. Z.», **24**, 261 (1923).
- [14] POINCARÉ H., *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Celeste*, t. 1, Paris (1892).
- [15] TRUESDELL C., *Ergodic Theory in Classical Statistical Mechanics*, XIV Corso di Varenna organizzato dalla Società italiana di Fisica (1960).
- [16] BIRKHOFF G. D., «Proc. Nat. Acad. Sci.», **17**, 656 (1930), «Papers» **2**, 404.
- [17] NEUMANN J. V., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», **17**, 650, 656 (1931).
- [18] HOPF E., *Ergodentheorie*, Berlin (1937).

- [19] OXTOBY J. C. e ULAM S. M., « Ann. Math. », **42**, 874 (1941).
 - [20] BIRKHOFF G. D. e KOOPMAN B. O., « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », **18**, 279 (1932).
 - [21] FOWLER R. H., *Statistical Mechanics*, 2^a ed., Cambridge (1936).
 - [22] LEWIS R. M., « Rational Mech. Anal. », **5**, 355 (1960).
 - [23] PAINLEVÉ P., « Compt. Rend. », **130**, 1699 (1900).
 - [24] CHERRY T. M., « Proc. Camb. Phil. Soc. », **22**, 287 (1925) e **22**, 325, 510 (1925).
 - [25] RÉSIBOIS P. e PRIGOGINE I., « Bull. Acad. Roy. Belg. », **46**, 53 (1960).
-

Dalla meccanica lagrangiana a quella einsteiniana.

Mi propongo di esporre sommariamente gli sviluppi della teoria einsteiniana della relatività, seguendo il filo conduttore costituito dall'algoritmo lagrangiano, adattato al principio di relatività.

MECCANICA LAGRANGIANA.

Diceva Lagrange nella lapidaria prefazione alla sua « Meccanica analitica »: ridurrò l'arte di risolvere problemi meccanici « a formule generali, il cui semplice sviluppo dà tutte le equazioni necessarie per la risoluzione d'ogni problema ». E infatti, costruita la funzione $\mathcal{L}(q/\dot{q}/t)$ delle coordinate libere q , delle loro derivate rispetto al tempo $\dot{q}$, e del tempo stesso t , differenza fra l'energia cinetica $T(q/\dot{q}/t)$ e l'energia potenziale $V(q)$,

$$(1) \quad \dot{\mathcal{L}}(q/\dot{q}/t) = T(q/\dot{q}/t) - V(q),$$

le equazioni differenziali che (insieme alle condizioni iniziali) reggono il movimento di un generico sistema olonomo, soggetto a sollecitazione attiva conservativa, sono le seguenti:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Le precedenti equazioni differenziali di Lagrange sono quelle che si possono trarre dal seguente principio variazionale di Hamilton:

$$(3) \quad \delta \int \mathcal{L}(q/\dot{q}/t) dt = 0.$$

Nella (3) la variazione è sincrona (si riferisce cioè alle coordinate q e non al tempo t) e s'annulla agli estremi dell'intervallo d'integrazione. Sia nella (3) che nelle (2) il tempo è variabile *privilegiata* rispetto alle variabili q che rappresentano le coordinate.

Come importante e semplicissimo caso particolare, si consideri un corpuscolo libero di massa m . Assumiamo come coordinate libere q le sue tre coordinate cartesiane y rispetto ad un osservatore inerziale (tale cioè che l'accelerazione risulti nulla, quando s'annulla la forza motrice

$$F_h = - \frac{\partial V}{\partial q_h}.$$

Sarà

$$(4) \quad \mathfrak{L} = \frac{m}{2} \sum \dot{y}_h^2 - V(y)$$

e le equazioni di Lagrange diverranno le equazioni « newtoniane »:

$$(5) \quad m\ddot{y}_h = - \frac{\partial V}{\partial y_h} \equiv F_h \quad (h = 1, 2, 3).$$

Come secondo importante esempio, si consideri un continuo materiale: siano y le coordinate cartesiane di un suo generico punto in un riferimento inerziale, ϱ la densità, w la densità d'energia interna ed esterna. La densità lagrangiana λ (per unità di volume) sarà:

$$(6) \quad \lambda = \frac{\varrho}{2} \sum \left(\frac{dy_h}{dt} \right)^2 - w$$

e il principio di Hamilton (3) si esprimerà così:

$$(7) \quad \delta \int dt \iiint \lambda dy = 0.$$

Da esso si traggono le note equazioni della dinamica dei continui (che diremo ancora « newtoniane »):

$$(8) \quad \varrho \frac{d^2 y_h}{dt^2} = f_h - \sum \frac{\partial p_{hk}}{\partial y_k} \quad (h, k = 1, 2, 3),$$

dove f_h sono le forze esterne per unità di volume e p_{hk} il tensore degli sforzi.

Le equazioni di Lagrange (2) sono invarianti di fronte a trasformazioni che, lasciando inalterato dt (perchè il tempo funge da assoluto e deve mantenere il suo carattere privilegiato), permettono di passare dalle coordinate q ad altre χ mediante le relazioni

$$(9) \quad \chi_h = \chi_h(q/t) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Così, in particolare, nel caso di un corpuscolo, le equazioni di Lagrange (2) permettono di ricavare le equazioni di movimento relativo ad un osservatore genericamente mobile rispetto ad un osservatore inerziale.

La meccanica di Lagrange soddisfa dunque ad un principio di relatività più lato di quello galileiano, che vuole l'invarianza assoluta, anche in forma, delle equazioni newtoniane (5) e (8) nel passaggio da un osservatore ad un altro in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al primo. Ma l'invarianza delle equazioni di Lagrange è soltanto relativa, subordinata cioè a una funzione *base*, sulla quale si opera direttamente la sostituzione imposta dal cambiamento delle variabili (9). La base nelle equazioni di Lagrange (2) è la « base dinamica » costituita dalla funzione di Lagrange $\mathcal{L}$.

Nel caso delle equazioni newtoniane (5) e (8), quando si esegue la trasformazione (9), che permette di passare dalle coordinate cartesiane y alle generali x attraverso le

$$(10) \quad x_h = x_h(y/t) \quad (h = 1, 2, 3)$$

(e lasciando inalterato dt), la base dinamica $\mathcal{L}$ comporta (come in tutte le equazioni della fisica classica) la « base geometrica » dl^2 , quadrato della distanza fra due punti infinitamente vicini dello spazio geometrico e, naturalmente, la « base temporale » dt . Si tenga però presente che, mentre nelle coordinate cartesiane y la base geometrica è data dalla forma pitagorica tridimensionale

$$(11) \quad dl^2 = \sum dy_h^2 \quad (h = 1, 2, 3),$$

eseguendo la trasformazione (10) questa assume la seguente forma differenziale quadratica:

$$(12) \quad dl^2 = \sum a_{hk}(x) dx^h dx^k \quad (h, k = 1, 2, 3).$$

Pur nella loro generalità, le (9) *non* comprendono le generiche trasformazioni involgenti le coordinate e il tempo, le generiche trasformazioni che, nel caso di un corpuscolo, riguardano il passaggio dalle 4 variabili $y_1 y_2 y_3 t$ alle 4 variabili $x_1 x_2 x_3 x_0$, le generiche trasformazioni (sia pure regolari e invertibili)

$$(13) \quad x_a = x_a(y/t) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

che trattano il tempo alla stregua delle altre variabili.

MECCANICA RELATIVISTICA RISTRETTA DI UN CORPUSCOLO.

Ora l'*esperienza* mostra che nel passaggio da un osservatore inerziale ad un altro pure inerziale, e quindi in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al primo, non restano invariate nè la distanza dl fra due punti infinitamente vicini, nè la durata elementare dt , ma resta invariata la *propagazione della luce* e con essa la forma differenziale quadratica, dipendente da dl e da dt :

$$(14) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2,$$

forma che eguagliata a zero dà appunto la legge di propagazione della luce e la sua velocità costante c , la medesima per entrambi gli osservatori inerziali.

Ciò comporta notevoli conseguenze cinematiche: la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi nei corpi in moto, insiste nelle trasformazioni di Lorentz che sostituiscono le trasformazioni della cinematica classica nel passaggio da un osservatore ad un altro in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al primo; la composizione delle velocità non secondo la regola del parallelogrammo, ma secondo una regola che com-

porta l'impossibilità di superare per composizione la velocità c della luce; porta a negare carattere assoluto (indipendente cioè dall'osservatore) allo spazio geometrico tridimensionale e al tempo, per affermare il carattere assoluto all'insieme dei due, allo *spazio-tempo*, costituito dal continuo quadridimensionale la cui metrica, rispetto ad un osservatore inerziale, è data dalla (14); può porsi cioè nella seguente forma pseudopitagorica:

$$(15) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2).$$

Più sinteticamente la (15) si scrive così:

$$(15') \quad ds^2 = \sum \eta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta,$$

essendo $y^0 = ct$ e $\eta_{\alpha\beta} = 0$ per $\alpha \neq \beta$, $\eta_{\alpha\beta} = 1$ per $\alpha = \beta = 0$, $\eta_{\alpha\beta} = -1$ per $\alpha = \beta = 1, 2, 3$.

Ad ogni punto dello spazio-tempo corrisponde un *evento* elementare, insieme ad una determinazione spaziale e una temporale; ad ogni movimento corpuscolare corrisponde una linea spazio-temporale.

Le precedenti conseguenze dell'invarianza della propagazione della luce hanno in ogni caso grande importanza concettuale. Tale importanza viene però praticamente meno per i moti che avvengono con velocità piccola di fronte alla grandissima velocità c della luce, perchè la (15) mostra che ds viene in tal caso a confondersi con cdt . Però anche l'importanza pratica diviene sensibile nei moti che avvengono con velocità non del tutto trascurabile di fronte a quella della luce.

La cinematica che si fonda sulla sola invarianza della propagazione della luce e limita i riferimenti a quelli inerziali in uno spazio-tempo pseudoeuclideo, per il quale *sempre e ovunque* la metrica ha la forma pseudopitagorica (15) o (15'), è la *cinematica relativistica ristretta*.

Bisogna ora istituire la *dinamica relativistica ristretta*. A tal fine basta valersi del procedimento lagrangiano, opportunamente adattato all'invarianza della propagazione della luce.

Per istituire la *dinamica relativistica ristretta di un corpuscolo* basta sostituire nel principio variazionale di Hamilton (3) all'elemento temporale $c dt$, che non ha carattere invariante, l'elemento di *tempo proprio* ds , dato dalla (15), che tale carattere ben possiede. Bisogna naturalmente riguardare la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ dipendente dalle 4 coordinate spazio-temporali degli eventi, e cioè la temporale y_0 e le tre spaziali y_1, y_2, y_3 , e dipendente dalle loro derivate, non rispetto al tempo, bensì rispetto al tempo proprio, dipendente cioè dalle 4 componenti della *velocità relativistica*

$$(16) \quad u^a = \frac{dy^a}{ds} \quad (a = 0, 1, 2, 3).$$

Questa velocità relativistica è un vettore dello spazio-tempo di modulo unitario.

La dinamica relativistica ristretta di un corpuscolo è dunque retta dal seguente principio variazionale:

$$(17) \quad \delta \int \mathcal{L}(y/u) ds = 0.$$

La variazione rispetta il tempo proprio e s'annulla agli estremi dell'intervallo d'integrazione.

Dal principio variazionale (17) si deducono le seguenti 4 equazioni differenziali (ancora sostanzialmente di Lagrange):

$$(18) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^a} = 0 \quad (a = 0, 1, 2, 3).$$

Se $v^i = \frac{dy^i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$) sono le componenti cartesiane della velocità spaziale, si ha

$$(19) \quad u^i = \frac{dy^i}{ds} = \frac{v^i}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

e si constata che, se il modulo v della velocità è piccolo di fronte a c , u^i poco differisce da $\frac{v^i}{c}$ e u^0 dall'unità.

D'altra parte, se indichiamo con μ una costante inerziale, la (4) deve sostituirsi con la seguente:

$$(20) \quad \mathfrak{L} = \frac{\mu c^2}{2} \sum \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + V(y).$$

Le equazioni di Lagrange (18) divengono perciò le seguenti quattro:

$$(21) \quad \frac{d}{ds} (\mu c^2 u_\alpha) = \frac{\partial V}{\partial y^\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

e, ponendo

$$(22) \quad m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad F_i = - \frac{\partial V}{\partial y^i} \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$\Pi = \frac{\partial V}{\partial y^0} \sqrt{c^2 - v^2},$$

$$(23) \quad \frac{d}{dt} (mv_i) = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{d}{dt} (mc^2) = \Pi.$$

Le prime tre equazioni (23) sono analoghe a quelle della dinamica classica newtoniana. In esse però la massa m è definita dalla prima delle (22) e varia con la velocità v , riducendosi a μ per $v = 0$ e tendendo all'infinito per $v \rightarrow c$ (s'interpreta ciò dicendo che la velocità della luce non può meccanicamente essere raggiunta); le F_i rappresentano invece le componenti spaziali della forza motrice.

In quanto all'ultima delle (23), essa è conseguenza delle precedenti se Π rappresenta la potenza $\Sigma F_i v^i$. Essa costituisce il teorema dell'energia, qualora l'energia cinetica T sia così espressa:

$$(24) \quad T = mc^2,$$

risultando quindi proporzionale alla massa (variabile) secondo il coefficiente c^2 .

Quando v^2 è trascurabile di fronte a c^2 la massa si riduce alla costante μ , le prime (23) si riducono alle newtoniane (5),

l'energia cinetica si riduce a $\mu c^2 + \frac{\mu}{2} v^2$ e differisce dalla classica $\frac{\mu}{2} v^2$ per la costante μc^2 interpretabile come energia intrinseca in condizioni di quiete.

Se v^2 non è trascurabile di fronte a c^2 , le equazioni (23) della dinamica relativistica ristretta non si confondono con quelle classiche e fra le due dinamiche vi è discrepanza.

Nell'ultima delle (23) si ravvisa poi una fondamentale circostanza fisica: l'equivalenza fra massa ed energia, coll'enorme coefficiente di ragguaglio c^2 .

È ben noto come tutti i fenomeni che comportano velocità paragonabili a quella della luce abbiano confermato le conseguenze tratte dalle equazioni relativistiche (23). In particolare la variabilità della massa con la velocità e l'equivalenza fra massa ed energia. Ricordo ad esempio: la variabilità della massa degli elettroni, l'equivalenza fra difetto di massa ed energia di legame, il bilancio massa-energia nelle reazioni nucleari, l'urto fra particelle e la loro disintegrazione, le applicazioni tecniche nei tubi elettronici e nelle macchine acceleratrici di particelle, ecc.

L'INERZIA.

Nel caso particolare nel quale viene meno la forza motrice il moto « per inerzia » si riduce al moto rettilineo uniforme, come in meccanica classica, perchè dall'ultima delle (23), per $\Pi = 0$, si deduce che la massa è costante, e quindi le prime (23), per $F_i = 0$, affermano che $v_i = \text{cost.}$ Rispetto al riferimento inerziale presupposto dalla (15), le coordinate spaziali risultano funzioni lineari del tempo e a questo movimento per inerzia corrisponde, nello spazio-tempo pseudoeuclideo, una retta. Allo stesso risultato si perviene, del resto, ponendo nel principio variazionale (17) al posto di $\mathcal{L}$ data dalla (20) la sola energia cinetica

$$T = \frac{\mu c^2}{2} \sum \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Dato il suo significato geometrico, la linea che caratterizza il moto inerziale nello spazio-tempo resta una retta anche quando ci si riferisce a generiche coordinate spazio-temporali x^a , eseguendo la trasformazione (13).

Ma tale retta non è altro che una *geodetica* dello spazio-tempo pseudoeuclideo, una linea cioè che soddisfa alla seguente formula variazionale

$$(25) \quad \delta \int ds = 0,$$

soltanto che, nel generico riferimento considerato, ds^2 non è dato dalla pseudopitagorica (15) (o dalla (15')), ma dalla seguente forma differenziale quadratica:

$$(26) \quad ds^2 = \sum a_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3),$$

alla quale si perviene trasformando la (15) mediante le (13).

La legge di moto per inerzia, nel riferimento generale considerato, è data dalle seguenti equazioni differenziali tratte dalla formula variazionale (25), quando si ponga per ds l'espressione ricavata dalla (26):

$$(27) \quad \frac{du^\alpha}{ds} = - \sum \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} u^\beta u^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3).$$

Nelle (27) $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ è la velocità relativistica (di modulo unitario) e $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\}$ sono i simboli di Christoffel, costruiti con i coefficienti $a_{\alpha\beta}$ della metrica e con le loro derivate ordinarie, dalle quali ultime dipendono linearmente ed omogeneamente.

Le equazioni (27) sono del tutto analoghe alle (21) e, col procedimento usato per trasformare le (21) nelle (23), assumono la forma di quelle che si scrivono in meccanica classica quando si riferisce il moto inerziale ad un osservatore non inerziale. Al posto delle cosiddette forze apparenti della meccanica classica (centrifughe, di Coriolis, ecc.) compaiono espressioni for-

mate con i simboli di Christoffel, simboli che non costituiscono un tensore, che si annullano nel riferimento inerziale e non in un riferimento non inerziale, proprio come le forze apparenti della meccanica classica.

Alle equazioni differenziali (27) delle geodetiche spazio-temporali, che danno in un generico riferimento il moto per inerzia, si perviene naturalmente anche ponendo nella (17) al posto della funzione $\mathcal{L}$ semplicemente la funzione $\frac{\mu c^2}{2} \sum a_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$ che rappresenta l'energia cinetica, perchè nel caso in esame è nulla la funzione $V(x)$ che dà l'energia potenziale. Introducendo poi la derivazione tensoriale subordinata alla metrica (26), la (27), che dà le geodetiche spazio-temporali, può scriversi così:

$$(28) \quad \sum u^\alpha /_\beta u^\beta = 0.$$

Si noti che nei generici riferimenti non inerziali considerati la propagazione della luce si ottiene eguagliando a zero la forma (26) che dà la metrica. Il moto di un segnale luminoso è perciò dato da una geodetica dello spazio-tempo (retta) di lunghezza nulla. Perchè essa sia reale bisogna che la forma (26) sia indefinita in segno, ad es. con la segnatura $+- - -$ come la (15). Più generalmente si considerino riferimenti per i quali la (26) ha la seguente forma indefinita:

$$(29) \quad ds^2 = a_{00} dx^{02} - dl^2,$$

dove $x^0 = ct$ è coordinata temporale, a_{00} è funzione positiva del posto e $dl^2 > 0$ è la distanza fra due punti infinitamente vicini dello spazio geometrico tridimensionale. La velocità γ della luce risulta sì reale, ma non risulta costante, perchè eguagliando ds^2 a zero si ottiene:

$$(30) \quad \gamma = \frac{dl}{dt} = c \sqrt{a_{00}}.$$

Neppure risulta costante la velocità della luce rispetto ad un osservatore uniformemente rotante rispetto al cielo delle stelle fisse.

È significativo rilevare che, proprio come conseguenza della segnatura indefinita della metrica (necessaria affinché la propagazione della luce sia reale), la funzione lagrangiana che compare nel principio variazionale (17) non risulta differenza fra l'energia cinetica relativistica e l'energia potenziale, ma, conformemente alla (20) e più espressivamente, *somma* delle due forme d'energia.

MECCANICA RELATIVISTICA RISTRETTA DEI CONTINUI.

Per trasformare il principio variazionale (7) che regge la dinamica classica dei continui nel corrispondente principio variazionale che ne regge la dinamica relativistica ristretta basta interpretare le 4 integrazioni che vi compaiono come integrazione in una regione τ dello spazio-tempo quadridimensionale pseudoeuclideo di metrica (15') e interpretare come doppio della densità lagrangiana λ l'invariante spazio-temporale che si ottiene componendo il tensore fondamentale $\eta_{\alpha\beta}$ col tensore doppio simmetrico $T^{\alpha\beta}$ che rappresenta nello spazio-tempo la somma delle varie forme di densità d'energia: in primo luogo la cinetica $\rho c^2 u^\alpha u^\beta$ e poi le altre $p^{\alpha\beta}$, quali tipicamente gli sforzi interni. Scriveremo dunque il principio variazionale cercato così:

$$(31) \quad \delta \int \lambda d\tau = 0,$$

essendo

$$(32) \quad 2\lambda = \sum \eta_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad T^{\alpha\beta} = \rho c^2 u^\alpha u^\beta + p^{\alpha\beta}.$$

Eseguendo la variazione nella (31), sia variando $T^{\alpha\beta}$, sia variando $\eta_{\alpha\beta}$, in modo però che lo spazio-tempo resti pseudo-euclideo, con che

$$(33) \quad \delta \eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta S_{\alpha/\beta} + \delta S_{\beta/\alpha}),$$

dove S_a funge da potenziale, la cui variazione s'annulla al contorno della regione spazio-temporale τ , si ricava:

$$(34) \quad \sum T^{a\beta}{}_{;\beta} = 0.$$

Questa afferma che *è nulla la divergenza del tensore energetico* e riassume 4 equazioni: le tre dinamiche della quantità di moto e quella dell'energia, affermando l'equivalenza fra la massa e l'energia nelle sue varie forme. Le equazioni riassunte dalla (34) si riducono alle classiche (8) e all'equazione di conservazione della massa, se v^2 è trascurabile di fronte a c^2 , ma non così se questa condizione vien meno. Le equazioni tratte dalla (34) costituiscono allora le equazioni della dinamica dei continui materiali nella teoria della relatività ristretta.

La (34), dato il suo carattere tensoriale nello spazio-tempo, mantiene la sua validità anche nel generico riferimento non inerziale che dà alla metrica spazio-temporale la forma generale (26). Naturalmente in questo caso la derivazione è quella tensoriale che fa intervenire i simboli di Christoffel.

Come semplice esempio, si consideri la massa completamente disgregata, cosicchè $p^{a\beta} = 0$. La (34) diviene:

$$(35) \quad \sum (\rho c^2 u^a u^\beta)_{;\beta} = 0.$$

Questa equazione si riduce alla (28), che afferma che il moto (inerziale) di ogni elemento materiale è dato da una geodetica (retta) dello spazio-tempo, e all'equazione

$$(36) \quad \sum (\rho c^2 u^\beta)_{;\beta} = 0$$

che esprime la conservazione dell'energia, dovuta alla massa e al suo movimento.

Torniamo al caso generale per fare due osservazioni.

La prima riguarda l'analogia dell'equazione spazio-temporale (34), che regge la dinamica dei continui, con l'equazione tensoriale che nello spazio geometrico tridimensionale regge la statica dei continui materiali, l'equazione che afferma appunto

che, in condizione d'equilibrio, è nulla la divergenza del tensore spaziale che riassume le varie forme di densità energetica statica (tipicamente gli sforzi). Nella teoria della relatività si passa dunque dalla statica alla dinamica sostituendo allo spazio geometrico tridimensionale lo spazio-tempo quadridimensionale. Si può ravvisare in questa suggestiva circostanza l'*aspetto relativistico del principio di d'Alembert*.

Con la seconda osservazione vogliamo rilevare che la legge della geodetica spazio-temporale (25), o l'equivalente (28), nonché la legge (34) che regge la dinamica dei continui materiali, soddisfano non soltanto al principio di relatività ristretta (invarianza delle leggi di fronte al passaggio da un osservatore inerziale ad un altro in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al primo), ma soddisfano addirittura ad un *principio di relatività generale*, e cioè d'invarianza delle leggi di fronte al passaggio da un riferimento spazio-temporale ad un altro generico.

ALTRI CAMPI FISICI SECONDO LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ.

Il medesimo procedimento che permette di ricavare per i campi materiali le equazioni lagrangiane da un unico principio variazionale, permette di ricavare le equazioni che reggono altri campi fisici. Per ottenere le equazioni relativistiche di tali campi basta dedurle dalla stazionarietà dell'integrale esteso ad una regione τ dello spazio-tempo di una densità lagrangiana λ costituita da un invariante costruito con le densità d'energia presenti nel campo.

Per esempio, nel caso del puro *campo elettromagnetico* (nel vuoto), il campo è rappresentato da un tensore emisimmetrico dello spazio-tempo $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. L'unico invariante che dà la densità d'energia di puro campo è l'invariante quadratico

$$(37) \quad \lambda = \frac{1}{2} \sum F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Per trarre dal principio variazionale (31) le equazioni di campo, basta valersi di un lemma analogo a quello di Clebsch, non però relativo ai vettori dello spazio, ma ai tensori doppi emisimmetrici. Grazie ad esso $F_{\alpha\beta}$ può riguardarsi come somma di un tensore irrotazionale, proveniente da un vettore potenziale (solenoidale) φ_α e uno solenoidale, proveniente da un secondo vettore potenziale (solenoidale) ψ^ν :

$$(38) \quad F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha/\beta} - \varphi_{\beta/\alpha}) + \sum \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^{\nu/\mu},$$

dove $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ è il tensore di Ricci nello spazio-tempo quadridimensionale. Dal principio variazionale (31) (col solito procedimento d'integrazione per parti e riguardando $\delta\varphi_\alpha$ e $\delta\psi^\nu$ arbitrari in τ , ma nulli al contorno) si ottengono le seguenti equazioni di campo:

$$(39) \quad \sum \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta/\mu} = 0, \quad \sum F^{\alpha\beta}/_\beta = 0.$$

Esse affermano che il tensore elettromagnetico è irrotazionale e solenoidale nello spazio-tempo. L'unico potenziale φ_α da cui dipende a posteriori (per la condizione d'irrotazionalità) il tensore elettromagnetico, il cosiddetto «potenziale elettromagnetico», soddisfa allora non all'equazione di Laplace, ma all'equazione di d'Alembert

$$(40) \quad \square \varphi_\alpha = 0$$

che, in virtù della segnatura $+- - -$ della metrica, esprime l'armonicità nello spazio-tempo. È grazie a questa segnatura che il campo elettromagnetico, retto dalla (40), ammette una effettiva propagazione ondosa.

Per considerare il campo elettromagnetico sì nel vuoto, ma con distribuzione elettrica data dal vettore spazio-temporale j^α , basta nell'espressione (37) di λ aggiungere all'invariante di puro campo l'invariante di distribuzione $\Sigma \varphi_\alpha j^\alpha$:

$$(41) \quad \lambda = \frac{1}{2} \sum F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \sum \varphi_\alpha j^\alpha.$$

Si ottengono così le seguenti equazioni di campo, equivalenti (rigorosamente) a quelle di Maxwell:

$$(42) \quad \sum \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta/\mu} = 0, \quad \sum F^{\alpha\beta}/_{\beta} = j^{\alpha}.$$

Esse dicono che, nello spazio-tempo, il tensore elettromagnetico è irrotazionale e che la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica.

Come si vede le leggi elettromagnetiche si ottengono da quelle elettrostatiche con la seguente semplice regola, nella quale si può ravvisare ancora il principio di d'Alembert relativistico: sostituire allo spazio geometrico tridimensionale, sede del campo elettrostatico, lo spazio-tempo quadridimensionale, sede del campo elettromagnetico; sostituire al vettore spaziale che individua il campo elettrostatico il tensore elettromagnetico spazio-temporale $F_{\alpha\beta}$; sostituire alla densità elettrica il vettore spazio-temporale j^{α} che dà la distribuzione elettrica.

Quanto abbiamo constatato per i campi meccanici e per il campo elettromagnetico ha carattere generale: il modo più acconcio per individuare un campo fisico è quello di affermare la stazionarietà dell'integrale esteso ad una regione dello spazio-tempo di una densità energetica invariante λ , costruita con quegli scalari, vettori, tensori spazio-temporali nei quali la fisica ravvisa gli enti tipici del campo. E la stazionarietà deve aver luogo per una generica variazione di *potenziali* di tali enti.

Le equazioni di campo che così si traggono sono certamente compatibili, se l'integrale può essere stazionario, e hanno carattere tensoriale nello spazio-tempo, soddisfacendo quindi al principio di relatività generale.

Della « ricetta » che ho dato ci si vale modernamente per stabilire un'assiomatica dei campi fisici semplice e sicura, consona all'intuizione, praticamente efficace. Dall'esperienza non si può però prescindere, perchè essa deve suggerire quali sono gli enti caratteristici dei vari campi, e deve giudicare se e a quali condizioni i fenomeni verificano le leggi desunte.

Il modo migliore per generalizzare i campi è quello di generalizzare l'espressione della densità lagrangiana invariante λ . Per questa via si può ad es. generalizzare il campo elettromagnetico maxwelliano, pervenendo al *campo mesonico*.

Basta a tal fine aggiungere al secondo membro della (41) l'invariante $\frac{1}{2k^2} \Sigma \varphi_a \varphi^a$, dove k denota una costante universale (con le dimensioni di una lunghezza) per ottenere le equazioni di Proca-Yukawa che reggono il campo mesonico. Esse affermano ancora che il tensore $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale, ma che la sua divergenza, invece che a j^a , è eguale a $j^a + \frac{\varphi^a}{k^2}$.

TEORIA GRAVITAZIONALE EINSTEINIANA.

La legge della geodetica spazio-temporale (25) dà un'interpretazione di carattere geometrico ai moti inerziali, e, attraverso l'equivalente sistema differenziale (27), trovano spiegazione geometrica le forze apparenti. Analoga cosa deve essere possibile per i moti gravitazionali, perchè anche il moto gravitazionale, come il moto inerziale, è indipendente dalla massa del corpuscolo mobile (almeno se questa massa è tanto piccola da non influire sul moto delle masse alle quali il campo è dovuto).

Fu partendo da questa osservazione, cioè sostanzialmente dalla possibilità di confondere la massa gravitazionale con la massa inerte, che Einstein istituì la sua teoria gravitazionale.

In tale teoria il campo gravitazionale si identifica con quello che dà la geometria dello spazio-tempo. Questo non è però pseudo-euclideo, ma *riemanniano*, incurvato dalle masse presenti. La sua metrica è data da una forma differenziale quadratica

$$(43) \quad ds^2 = \sum g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

a cui non può darsi ovunque la forma pseudopitagorica (15) con un semplice cambiamento di coordinate. Il tensore fonda-

mentale simmetrico $g_{\alpha\beta}$, le cui componenti costituiscono i coefficienti della metrica, rappresenta i potenziali gravitazionali e inerziali; i simboli di Christoffel, costruiti con le loro derivate ordinarie, individuano le forze gravitazionali e inerziali; il tensore simmetrico $R^{\alpha\beta}$, ottenuto contraendo il tensore di Riemann, il tensore di curvatura, dipendente dai simboli di Christoffel e dalle loro derivate, dà tutte le forme d'energia gravitazionale.

Il modo più significativo per ottenere le equazioni che reggono il campo che dà la geometria dello spazio-tempo riemanniano, o, ciò che è lo stesso, il campo gravitazionale, è quello di scrivere le equazioni lagrangiane tratte da un principio variazionale (31).

Con $R^{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}$ si costruisce l'invariante $R = \Sigma R^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$ che dà localmente la curvatura media. Esso viene assunto come densità lagrangiana λ , esternamente alle masse, nel principio variazionale (31). Lo spazio-tempo, esternamente alle masse, è dunque sì curvo, ma in modo che risulti stazionario il valor medio spazio-temporale della curvatura media locale, tale cioè che sia:

$$(44) \quad \delta \int R d\tau = 0.$$

Dando al tensore fondamentale la variazione $\delta g_{\alpha\beta}$, varia R , che è funzione di $g_{\alpha\beta}$ e, come $R^{\alpha\beta}$, anche delle sue derivate ordinarie prime $g_{\alpha\beta,\mu}$ e derivate seconde $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$, varia $d\tau$, ma l'integrale esteso alla regione spazio-temporale τ non deve variare, qualunque sia $\delta g_{\alpha\beta}$, purchè nullo, con le sue derivate prime, al contorno di τ . Alle equazioni lagrangiane che se ne deducono, valide esternamente alle masse, può darsi la seguente forma tensoriale:

$$(45) \quad A^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = 0,$$

o anche, più semplicemente,

$$(45') \quad R^{\alpha\beta} = 0.$$

Le precedenti *equazioni gravitazionali* (così si chiamano) furono ottenute da Einstein nel 1916, proprio scrivendo le equazioni di Lagrange tratte dal principio variazionale (44).

In più diretta forma tensoriale furono ricavate dal nostro Palatini nel 1919, mostrando che la (44) può scriversi così:

$$(44') \quad \int \sum A^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} dx = 0,$$

dalla quale scende appunto la (45).

Einstein ha rilevato che l'invariante di curvatura R è sostanzialmente l'unico che gode delle proprietà richieste per λ , cosicchè ben definita risulta la teoria della gravitazione che se ne trae.

Si osservi ora che dando a $g_{\alpha\beta}$ la variazione analoga alla (33), $\delta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta S_{\alpha/\beta} + \delta S_{\beta/\alpha})$ corrispondente ad una variazione infinitesima di coordinate e scrivendo che la (44') è verificata qualunque sia δS_α , si trova la seguente identità, che rientra in altre già trovate per altra via da Bianchi:

$$(46) \quad \sum A^{\alpha\beta/\beta} \equiv 0.$$

In prima approssimazione i potenziali gravitazionali sono individuati da un solo potenziale φ e le equazioni di campo (45) si riducono all'equazione di Laplace $\Delta\varphi = 0$, tipica della teoria classica, ma non così a pieno rigore, allorchè l'equazione tensoriale di campo (45) sintetizza 10 equazioni differenziali del secondo ordine nei 10 potenziali $g_{\alpha\beta}$, fra le quali equazioni intercorrono però le 4 identità sintetizzate nella identità di Bianchi (46), che lasciano libera la scelta delle 4 coordinate spaziotemporali.

Se, invece di restare fuori dalla materia, penetriamo nel suo interno, bisogna assumere come densità lagrangiana λ la somma di R e di $\chi \Sigma T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$, dove χ è una costante gravitazionale di ragguaglio e $T^{\alpha\beta}$ il tensore energetico, dato dalla seconda delle (32), dovuto alle masse in movimento, agli sforzi, all'ener-

gia elettromagnetica, ecc. In tal caso dal principio variazionale (31) si deduce, invece della (45), la seguente equazione tensoriale:

$$(47) \quad A^{\alpha\beta} = \chi T^{\alpha\beta}.$$

In particolare, supponendo spazialmente isotropo il tensore energetico, la (47) fornisce suggestive soluzioni d'interesse cosmologico, sia statiche che dinamiche, nelle quali lo spazio geometrico è ipersferico, finito dunque, ma illimitato.

Nel campo gravitazionale esterno alle masse, un corpuscolo di piccola massa si muove per inerzia, e il suo moto è dato da una geodetica dello spazio-tempo riemanniano, da una linea cioè che verifica la corrispondente legge variazionale (25), o le equivalenti equazioni differenziali (27). Essa non è però genericamente una retta, perchè ora la metrica, ottenuta integrando le equazioni di campo (45), non è quella (26) di uno spazio-tempo pseudoeuclideo, bensì quella (43) di uno spazio-tempo riemanniano.

Nei casi comuni la metrica spazio-temporale, ricavata integrando le equazioni di campo (45) o (47), poco si scosta da quella di uno spazio-tempo pseudoeuclideo che sempre e ovunque può porsi nella forma pseudopitagorica (15), tuttavia la sua geodetica, che dà la legge di moto di un corpuscolo di piccola massa, si scosta notevolmente dalla retta, mentre la legge di moto poco si scosta dalla classica desunta dalla teoria newtoniana della gravitazione.

Che poco alterando le classiche leggi gravitazionali si pervenga alla legge della geodetica in uno spazio-tempo curvo, di metrica poco diversa dalla pseudopitagorica (15), lo mise chiaramente in evidenza Levi-Civita agli albori della relatività generale in una celebre conferenza intitolata « Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica ».

Parte il Levi-Civita dalla classica espressione (4) della funzione di Lagrange, dove $V(y) = -mU(y)$, essendo $U(y)$ il potenziale per unità di massa dovuto al campo gravitazionale. Mostra che, se v^2 e U sono piccoli di fronte a c^2 , quadrato della

velocità della luce, è possibile alterare poco il principio di Hamilton e la conseguente classica legge di moto gravitazionale, in modo che il principio di Hamilton venga a coincidere con la legge variazionale (25) della geodetica di uno spazio-tempo di metrica

$$(48) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2U(y)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2).$$

Questa metrica è, come si vede, quella di uno spazio-tempo riemanniano, ma è poco discosta dalla pseudopitagorica (15).

Nella teoria einsteiniana del campo gravitazionale si verifica una circostanza che non ha riscontro nei vari campi della fisica classica: dalle sole equazioni di campo, alle derivate parziali, si traggono le equazioni differenziali ordinarie che danno il moto delle sorgenti del campo.

Entro la materia è facile constatarlo, perchè, grazie all'identità di Bianchi (46), dalla (47) si deduce la solenoidalità del tensore energetico, cosicchè la (34) che l'esprime sussiste anche quando lo spazio-tempo è riemanniano e non pseudoeuclideo. E le equazioni differenziali ordinarie riassunte nella (34), tratta dalle equazioni alle derivate parziali riassunte nella (47), riguardano il moto delle particelle materiali. In particolare, nell'ambito di materia disgregata, fra i cui elementi si esercitano soltanto azioni gravitazionali, la (34) si riduce alla (28) che dà il moto gravitazionale delle particelle attraverso la legge della geodetica spazio-temporale, legge che risulta così conseguenza delle equazioni di campo.

Anche quando si rappresentano, come di solito, le masse puntiformi con singolarità che costituiscono le sorgenti del campo gravitazionale, le equazioni differenziali ordinarie che ne danno il moto vengono tratte soltanto dalle equazioni di campo alle derivate parziali (45), che valgono esternamente ad esse, e non da leggi estranee. Ciò è possibile grazie alla non linearità delle (45) e alle identità (46) che fra di esse sussistono.

È veramente singolare e degno di meditazione che le equazioni del campo gravitazionale einsteiniano racchiudano in sé il moto delle proprie sorgenti!

È così che nella teoria gravitazionale einsteiniana viene correttamente impostato il problema fondamentale della meccanica celeste, riguardante il moto di due o più corpi di masse paragonabili. Che se poi la massa di un corpo è piccola di fronte a quella degli altri, il suo moto risulta dato dalla geodetica dello spazio-tempo incurvato dalle masse degli altri corpi, e ancora la legge della geodetica spazio-temporale consegue dalle equazioni di campo.

La possibilità di ricavare nella teoria della relatività il moto delle sorgenti del campo gravitazionale dalle equazioni indefinite del campo stesso lascia intravedere che tale possibilità sussista anche nella meccanica ondulatoria vigente nel microcosmo, fornendo nello schema relativistico un'interpretazione della dualità onde (cioè campo) e corpuscoli (cioè sorgenti), così come hanno indicato De Broglie, Vigier, Bohm.

TEORIE RELATIVISTICHE UNITARIE.

Nella teoria della relatività generale sia l'inerzia che la gravitazione trovano interpretazione nella geometria dello spazio-tempo, ma non così il campo elettromagnetico. Questo trova nello spazio-tempo riemanniano della relatività generale sintetica rappresentazione e concettualmente semplici risultano le leggi che lo governano, ma non trova interpretazione geometrica.

Sin dal 1918 s'impose il problema di costruire una *teoria relativistica unitaria* che, facendo capo ad un unico campo spazio-temporale, desse una spiegazione di carattere geometrico dell'inerzia, della gravitazione e dell'elettricità. Diverse furono le teorie unitarie avanzate, anelanti a scoprire il misterioso legame che deve intercedere fra gravitazione ed elettricità. Anche Einstein vi dedicò 35 anni di duro lavoro, ma i risultati conseguiti non compensarono le fatiche che erano costate.

Per istituire una teoria unitaria non bastava ritenere lo spazio-tempo riemanniano quadridimensionale, bisognava ampliarne la geometria: o ritenendolo riemanniano a più di 4

dimensioni, o ritenendolo sì quadridimensionale, ma non riemanniano perchè la sua metrica era più complessa della riemanniana (43), oppure non riemanniano perchè, pur essendo la sua metrica ancora data dalla (43), i simboli di Christoffel erano sostituiti da altri coefficienti, a priori indipendenti dai coefficienti della metrica, ma che, come i simboli di Christoffel, permettevano di eseguire la derivazione tensoriale, realizzando la connessione fra due intorni infinitesimi contigui. A quest'ultimo partito si attenne Einstein nell'ultima teoria unitaria da lui formulata.

Nell'ultima teoria unitaria einsteiniana lo spazio-tempo è individuato dal campo di un unico tensore fondamentale $G_{\alpha\beta}$, non però simmetrico: la sua parte simmetrica dà i coefficienti $g_{\alpha\beta}$ della metrica (43); la sua parte emisimmetrica individua il campo elettromagnetico. Questo spazio-tempo gode di proprietà analoghe alle riemanniane, perchè, come il tensore $g_{\alpha\beta}$ negli spazi riemanniani, anche il tensore $G_{\alpha\beta}$ funge da costante, ha cioè derivato tensoriale nullo, e questa condizione permette di legare i coefficienti di connessione alle componenti $G_{\alpha\beta}$ e alle loro derivate ordinarie; in più, come negli spazi di Riemann, è costante il tensore di Ricci, che permette di costruire le formazioni esterne, quali i prodotti esterni, i rotori, ecc., e ciò fa sì che sia nullo un certo vettore Γ_a dipendente dalla torsione, torsione che nello spazio-tempo unitario si presenta accanto alla curvatura.

Per ottenere tutte le equazioni che reggono il campo unitario, e cioè le equazioni gravitazionali ed elettromagnetiche, basta ricavare le equazioni lagrangiane dal principio variazionale (44), subordinandolo però alla condizione $\Gamma_a = 0$. In esso, naturalmente, l'invariante di curvatura R , che costituisce la densità lagrangiana, si otterrà componendo col tensore fondamentale $G_{\alpha\beta}$, non simmetrico, il tensore di curvatura contratto $R^{\alpha\beta}$, anch'esso non simmetrico e costruito con le sue derivate ordinarie prime e seconde nello stesso modo col quale il tensore di Riemann contratto è costruito con $g_{\alpha\beta}$ e le sue derivate ordinarie prime e seconde.

È ancora, come si vede, il procedimento lagrangiano che permette di ottenere le equazioni di campo nell'ultima teoria unitaria einsteiniana, ed è per questo che vi ho accennato alla fine di questa mia fugace esposizione sulla teoria della relatività.

* * *

Lasciatemi concludere affermando che due sono i fondamenti di questa teoria: in primo luogo il carattere assoluto della propagazione della luce e quindi dello spazio-tempo, invece che separatamente dello spazio e del tempo, come avviene nella fisica classica; in secondo luogo il metodo lagrangiano usato per ottenere sia le equazioni di movimento di un corpuscolo, che quelle che reggono i vari campi fisici, traendo queste equazioni da un principio variazionale formulato nello spazio-tempo. La fusione realizzata nello spazio-tempo fra spazio e tempo, l'unicità dell'algoritmo lagrangiano, capace di adattarsi alle varie circostanze fisiche, spiegano come e perchè la teoria della relatività pervenga a sintesi concettuali e algoritmiche tanto suggestive: quella di geometria e cinematica, di massa ed energia, di campo elettrico e campo magnetico, d'inerzia e gravitazione.

Sviluppi e risultati della meccanica ondulatoria.

Riassunto. — *Si espongono brevemente i principi della Meccanica Ondulatoria ricollegandoli ai lavori classici di Lagrange, Hamilton e Jacobi, e si accenna poi al loro moderno inquadramento nella forma più generale della Meccanica Quantistica. Si passano in rapida rassegna le applicazioni della Meccanica Ondulatoria ai fenomeni di diffrazione degli elettroni e dei neutroni, e alla struttura degli atomi, delle molecole e dei cristalli, mettendone in evidenza le conferme sperimentali. Si accenna infine ai limiti di validità della Meccanica Ondulatoria e ai suoi rapporti con la moderna Teoria dei Campi.*

INTRODUZIONE.

La Meccanica Ondulatoria non è altro che una particolare formulazione matematica della Meccanica Quantistica, e soltanto nel quadro della M. Q. è possibile comprenderne la struttura logica in tutta la sua generalità. Essa ha però sulle altre possibili formulazioni il vantaggio di essere, almeno in certi casi, più facilmente accessibile all'intuizione: inoltre quasi tutti i problemi pratici della M. Q. si risolvono facendo uso della M. O. Ciò spiega la situazione di privilegio che a questa si dà di solito nelle trattazioni elementari.

Il mio compito è di illustrare gli sviluppi e i risultati della M. O., ciò che non è evidentemente possibile fare in modo adeguato nel breve spazio di una conferenza. Dovrò quindi essere assai schematico ed incompleto. Parlerò prima dei legami sto-

rici e logici che ricollegano la M. O. alla grande corrente di idee che nacque dalla *Mécanique Analytique* di Lagrange e si sviluppò in tutto il XIX secolo attraverso l'Opera di Hamilton, Jacobi e di altri. Poi farò una brevissima rassegna, poco più che una enumerazione, di alcuni dei campi della fisica a cui è stata applicata con successo la M. O., indicando anche quali sono i limiti oltre i quali la M. O. deve essere sostituita da una teoria più generale, che è la cosiddetta « *Teoria dei Campi* », attualmente in pieno sviluppo.

LE ANALOGIE OTTICO-MECCANICHE.

Luigi de Broglie ha raccontato in parecchi suoi scritti come sorse in lui la prima idea della M. O., e come questa idea si venne poi concretando in diverse forme successive di teoria, che egli andò elaborando, attraverso penosi dubbi e serie difficoltà, tra il 1925 e il 1928. La prima nota dal titolo « *Ondes et quanta* » fu presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi il 10 settembre 1923, cioè quasi esattamente 40 anni fa.

La prima ispirazione gli fu suggerita dal confronto tra il *principio di Fermat*, che riassume le leggi dell'ottica geometrica:

$$(1) \quad \delta \int_A^B n ds = 0$$

e il principio della *minima azione* che esprime sinteticamente la forma della traiettoria di un punto materiale di data energia E in campo conservativo, $U(x, y, z)$:

$$(2) \quad \delta \int_A^B \sqrt{E - U} ds = 0.$$

Da questo confronto (del resto assai antico) risulta che le possibili traiettorie del punto coincidono con i possibili raggi in un mezzo il cui indice di rifrazione (funzione del posto) sia proporzionale a $\sqrt{E - U(x, y, z)}$. Quindi la meccanica del punto in campo conservativo è formalmente identica all'ottica geometrica.

Ma l'ottica geometrica è solo un'approssimazione dell'ottica ondulatoria: ciò suggerì a de Broglie che la meccanica classica fosse un'approssimazione di una più generale meccanica X , secondo la proporzione simbolica

$$\text{ottica geom. : ottica ondul.} = \text{mecc. class. : } X.$$

Come è noto la meccanica classica, così perfetta per i sistemi macroscopici, si era manifestata inadeguata per i moti degli elettroni entro l'atomo, così come l'ottica geometrica è inapplicabile ai sistemi ottici molto piccoli (confrontabili con la lunghezza d'onda): da ciò nacque in de Broglie la speranza che la meccanica X fosse quella da applicare appunto ai sistemi di dimensioni atomiche. Questa speranza era rafforzata dal fatto che le proprietà tipiche degli atomi, che la meccanica classica non riusciva a spiegare, erano essenzialmente certe discontinuità dell'energia e dei momenti angolari, collegate, in modo fino allora misterioso, a certi numeri interi detti « *numeri quantici* ». Ma appunto, i fenomeni di interferenza e di onde stazionarie, tipici dell'ottica ondulatoria, sono caratterizzati dall'intervento di numeri interi, il che poteva essere un altro indizio del carattere ondulatorio dei fenomeni intraatomici. È questa l'idea direttiva che condusse de Broglie alla M. O.

Ma l'analogia formale tra ottica geometrica e meccanica classica va molto oltre il confronto dei principi variazionali. Essa è stata messa ampiamente in luce da *Hamilton* circa un secolo prima che sorgesse la M. O., in un elegante lavoro, che è stato ripreso e riesposto lucidamente da *Schrödinger* nella seconda di una serie di memorie fondamentali che egli pubblicò nel 1926 e che diedero alla M. O. la sua attuale forma matematica. Il lavoro di Hamilton era ben noto ai fisici e ai matematici all'epoca in cui lo utilizzò Schrödinger ma, come questi ebbe a notare, « nella maggior parte delle trattazioni moderne queste concezioni così potenti e feconde si presentano spoglie della magnifica veste intuitiva che aveva dato loro Hamilton, e che viene oggi lasciata da parte come un accessorio superfluo ». È invece proprio questa « veste intuitiva » che fornì a Schrö-

dinger lo spunto per passare dalla Meccanica Analitica alla Meccanica Ondulatoria.

Il lavoro di Hamilton consiste in una interpretazione cinematica del metodo di Jacobi per l'integrazione delle equazioni del moto, fondato, come è noto, sull'equazione a derivate parziali (detta di Hamilton-Jacobi)

$$(3) \quad H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

(dove $H(q, p)$ è l'hamiltoniana del sistema). Un qualsiasi integrale « completo » $S(q, t, \alpha)$ di questa equazione è la « funzione principale » di Hamilton, da cui si ricavano, nel modo noto, le equazioni del moto. Nel caso conservativo la S è della forma

$$(4) \quad S(q, t, \alpha) = W(q, \alpha) - Et.$$

Ora, l'interpretazione data da Hamilton a questo procedimento consiste nel considerare le superficie mobili $S(q, t, \alpha) = \text{cost}$ come possibili superfici d'onda (cioè di fase costante) di una propagazione ondosa nello spazio delle configurazioni ⁽¹⁾: esse si spostano con una velocità normale u che (nel caso di un solo punto di massa m) è data da

$$(5) \quad u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

e le loro traiettorie ortogonali, o « raggi », coincidono con le possibili traiettorie del punto. Si noti però che la u non è affatto uguale alla velocità del punto.

Si noti poi che in questa teoria di Hamilton-Jacobi resta una larga arbitrarietà: essa non precisa la forma analitica della funzione che si propaga per onde (o « funzione d'onda »), (p. es. la sua dipendenza dal tempo) ma solo la forma delle superficie d'onda e il loro movimento. In altre parole, se si chiama

⁽¹⁾ Prendendo come metrica di questo spazio $ds^2 = 2(E - U) dt^2$.

$A(q, t)$ la ampiezza delle onde e $\varphi(q, t)$ la loro « fase », cioè se la « funzione d'onda » si scrive nella forma $Ae^{i\varphi}$, la A resta del tutto arbitraria, e la φ può essere una funzione arbitraria di S : cambiando tale funzione non cambia la forma delle superficie d'onda, nè la loro velocità di propagazione.

L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER.

Per passare ora dalla meccanica classica a quella ondulatoria, la via più naturale, secondo Schrödinger, è di scegliere anzitutto in modo opportuno quegli elementi che la teoria di H. J. lascia arbitrari (ed è attraverso questa scelta che entrerà nella teoria la costante h di Planck): si dovrà poi sostituire alla equazione di H. J. un'equazione di propagazione ondosa, che si riduca a quella come caso limite per $h \rightarrow 0$.

Ciò si può ottenere prendendo come funzione d'onda

$$(6) \quad \psi(q, t) = A(q)e^{\frac{i}{\hbar}S} = A(q)e^{\frac{i}{\hbar}W(q)}e^{-\frac{i}{\hbar}Et},$$

(dove $\hbar$ sta per $h/2\pi$) e imponendo ad essa di soddisfare l'equazione differenziale delle onde:

$$(7) \quad \Delta\psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

dove la velocità di fase u è quella data dalla teoria di H.-J., cioè (per un punto di massa m) dalla (5). Si ottiene così la equazione

$$(8) \quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0$$

che si chiama « equazione di Schrödinger per gli stati stazionari ». Come si vede dalla (6), la parte reale e quella immaginaria di ψ sono funzioni sinusoidali del tempo di frequenza

$$(9) \quad \nu = \frac{E}{h}.$$

La lunghezza d'onda risulta, da (5) e (9),

$$(10) \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

cioè, detta p la quantità di moto,

$$(11) \quad \lambda = \frac{h}{p}.$$

Dalla (10) e (9) si ricava poi che la *velocità di gruppo* delle onde è

$$(12) \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)},$$

e questa coincide con la velocità del punto secondo la meccanica classica. E si può verificare che al limite per $\lambda \rightarrow 0$ le superfici d'onda si muovono proprio secondo l'equazione di H.-J.

L'equazione di Schrödinger (8) trova la sua principale applicazione nei problemi in cui il campo di forze è tale che esistono soluzioni tendenti a zero all'infinito, o addirittura nulle all'infuori di una regione finita. In tal caso le condizioni al contorno per la ψ conducono a un *problema di autovalori*, impongono cioè al parametro E (e quindi alla frequenza ν) certi valori, e le « autofunzioni » corrispondenti rappresentano delle *onde stazionarie*.

Gli autovalori dell'equazione di Schrödinger possono formare un insieme discreto, o continuo, o parte discreto e parte continuo. Gli autovalori discreti corrispondono, nel modello classico, a un elettrone « legato » (cioè che si muove in una orbita tutta al finito), quelli continui a un elettrone che viene dall'infinito o va all'infinito (problemi di urto). Ora, la presenza di valori discreti dell'energia degli atomi (« *livelli energetici* ») come è noto è la base empirica di tutta la spettroscopia ottica, infrarossa, ultravioletta e Röntgen, che permette di determinarne i valori con grande precisione. E mentre il carattere discreto di questi livelli era inesplicabile finchè si cercò di applicare agli

atomi la meccanica classica, esso resta invece giustificato dalla M. O. nel modo più naturale, e cioè in modo matematicamente analogo a quello che determina le frequenze proprie di vibrazione di una corda. E l'accordo quantitativo coi dati sperimentali, come dirò fra poco, è eccellente.

IL SIGNIFICATO DELLA FUNZIONE D'ONDA.

Se questo è il significato fisico degli autovalori della (8) resta ora da parlare del significato fisico delle rispettive autofunzioni ψ .

Secondo le vedute oggi accettate dalla quasi totalità dei fisici, la ψ non rappresenta una grandezza fisica osservabile, ma solo un ente matematico che riassume sinteticamente tutte le informazioni che si possono avere sullo « stato » dell'elettrone.

Non è questa una situazione nuova nella fisica. Si pensi p. es. ai potenziali elettromagnetici scalare e vettoriale: essi non sono grandezze direttamente osservabili (tanto è vero che possono essere cambiati con una « gauge-transformation ») ma da essi si possono ricavare tutte le informazioni relative al campo elettrico e a quello magnetico, grandezze direttamente osservabili.

In modo analogo, dalla ψ di Schrödinger si possono ricavare due grandezze (una scalare e una vettoriale) aventi significato fisico. Tale significato però (e qui è la novità) è di carattere *probabilistico*, cioè non permette di prevedere i risultati di misure fatte su un solo elettrone, ma solo i risultati statistici di misure fatte su un grandissimo numero di elettroni appartenenti ad altrettanti sistemi identici e nello stesso stato.

Tali grandezze sono le seguenti (la ψ si suppone normalizzata, e ψ^* è la sua complessa coniugata):

$$(I3) \quad \rho = \psi\psi^*,$$

$$(I4) \quad \vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^* \text{ grad } \psi).$$

Là ρ ha il significato di una densità di probabilità: precisamente, $\rho(x, y, z, t) dx dy dz$ rappresenta la probabilità che, se si esegue un'esperienza diretta a rivelare l'elettrone al tempo t (p. es. mediante un'emulsione fotografica) esso risulti localizzato nell'elemento di volume $dx dy dz$. Perciò si dice che ρ è la « densità di probabilità di presenza », o, brevemente, la « *densità di presenza* ».

Il vettore $\vec{j}$ ha un significato probabilistico un po' più lungo da spiegare: mi limiterò a dire che esso si chiama « *densità di corrente probabilistica* ».

È notevole il fatto che ρ e $\vec{j}$ soddisfano la relazione

$$(15) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

che è analoga all'equazione di continuità della idrodinamica ed esprime la conservazione delle particelle.

L'interpretazione probabilistica della ψ contiene una delle più radicali innovazioni introdotte nella fisica dalla M. O. e cioè l'*indeterminismo*. Questa interpretazione fu raggiunta faticosamente dopo non pochi tentativi fatti in varie direzioni, tra il 1923 e il 1928, per dare un significato fisico alla « funzione d'onda » ψ : citerò fra questi tentativi la teoria del *pacchetto d'onde*, di Schrödinger, quella della *doppia soluzione* e quella dell'*onda pilota*, entrambe di de Broglie, e la teoria *idrodinamica* di de Broglie e di Madelung: tutte si rivelarono insostenibili per una ragione o per l'altra. Fu Max Born che, in una nota del 1926, propose l'interpretazione probabilistica della ψ (e in pari tempo il principio di sovrapposizione di cui dirò tra un momento), ma delle idee così nuove non furono accettate senza contrasti, i quali durarono fino al 1928, anno in cui lo stesso de Broglie aderì al punto di vista di Born. A consolidare questo punto di vista contribuì fin dal 1927 Heisenberg il quale, in una nota memorabile, dimostrò in modo del tutto generale, fondato su un esame epistemologico delle definizioni di coordinate e di momenti, il suo famoso *principio di indeterminazione* ($\Delta p_i \Delta q_i \geq \hbar/2$). Da questo esame risulta che il concetto di probabilità

entra nella M. O. in modo assai più radicale che non nella classica teoria cinetica dei gas, e cioè non per la pratica impossibilità di misurare tutti i parametri del problema, ma perchè la definizione operativa di tali parametri esclude la possibilità, sia pure concettuale, di determinarli tutti. Questo punto di vista è stato poi ampiamente discusso e approfondito anche nei suoi aspetti filosofici da *Bohr*, da *Reichenbach* e altri, ed è oggi accettato dalla quasi totalità dei fisici.

Non va taciuto tuttavia che nel 1952 *Bohm*, e poi (1954) *Bohm* e *Vigier*, hanno tentato di risuscitare la vecchia teoria determinista (detta della « doppia soluzione ») di de Broglie, cercando di eliminarne le incongruenze mediante l'introduzione di nuove ipotesi. In seguito a ciò lo stesso de Broglie si è riaccostato alle sue vecchie idee e da 12 anni va apportando a questi tentativi il contributo della sua competenza ed autorità. Si deve però riconoscere che questi lavori, nonostante l'indiscussa autorità dei loro Autori, hanno finora raccolto scarsi consensi fra i fisici, forse perchè l'artificiosità delle ipotesi non è stata ancora ripagata da alcuna conferma sperimentale.

IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE E L'EQUAZIONE GENERALE DI SCHRÖDINGER.

Il significato probabilistico della funzione d'onda ψ (o meglio di $|\psi|^2$) di cui ho parlato finora non è necessariamente limitato ad una ψ della forma (6), cioè funzione sinusoidale del tempo. Questa corrisponde a ciò che in ottica è luce monocromatica. Ma è concepibile che un elettrone possa trovarsi in uno stato rappresentato da una ψ che dipenda dal tempo in modo del tutto generico e che con una analisi di Fourier si potrà considerare come una combinazione lineare (o un integrale) di termini della forma (6) con diverse frequenze (l'analogia cioè della luce non monocromatica). P. es. sia

$$(16) \quad \psi = \sum_n C_n U_n(q) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}},$$

dove le U_n sono altrettante autofunzioni della (8) corrispondenti agli autovalori E_n , e le C_n sono costanti arbitrarie. Quale significato può attribuirsi a una funzione d'onda siffatta? Essa rappresenta uno stato dell'elettrone, in cui è indeterminata non solo la posizione ma anche l'energia. Precisamente, se si esegue una misura di energia si può trovare ognuno dei valori E_n , con le rispettive probabilità proporzionali a $|C_n|^2$.

È questo il *principio di sovrapposizione*, introdotto (come ho accennato prima) da Born nel 1926.

La funzione d'onda (16) naturalmente non soddisfa la (8) ma un'equazione più generale detta *equazione temporale* di Schrödinger:

$$(17) \quad \Delta\psi - \frac{2m}{\hbar^2} U\psi = - \frac{2im}{\hbar} \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Essa si può considerare ottenuta dalla equazione classica

$$H(q, p) = E$$

con la sostituzione

$$(18) \quad p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

ossia si può scrivere (e questa è la forma più generale della equazione di Schrödinger, valida in qualunque sistema di coordinate e anche per sistemi di più particelle)

$$(19) \quad i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = H\left(q, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi.$$

Il principio di sovrapposizione, dando un significato alla « addizione » di più stati, ha aperto la via ad una generalizzazione matematica estremamente elegante e feconda della M. O. Essa consiste nel considerare gli « stati » di un elettrone (o, più generalmente, di un sistema) come uno spazio lineare (a infinite dimensioni), e applicare ad esso i concetti e gli algoritmi dell'algebra lineare. Da questo punto di vista, i postulati della M. O. che ho ricordato poco fa, circa l'interpretazione

degli autovalori dell'equazione di Schrödinger, e circa l'interpretazione probabilistica della ψ e dei coefficienti C_n del suo sviluppo di Fourier, non sono che casi particolari di un postulato generale, che consente di calcolare, dato il « *vettore di stato* » di un sistema, i risultati che può fornire la misura di una qualsiasi grandezza fisica (od « *osservabile* ») ad esso relativa, e le rispettive probabilità.

Ma questa, che è la forma più completa della Meccanica Quantistica, non rientra nell'ambito della mia relazione, la quale deve essere circoscritta alla M. O. La M. O. si può considerare come una rappresentazione particolare della Meccanica Quantistica ottenuta riferendo lo spazio vettoriale degli stati a un particolare sistema di assi.

LA M. O. RELATIVISTICA.

Questa di cui ho parlato finora è la M. O. non relativista: è chiaro infatti che l'equazione di Schrödinger non è invariante nelle trasformazioni di Lorentz, poichè la variabile tempo ha in essa una posizione privilegiata. Questa teoria fu concepita originariamente per gli elettroni, ma fin dai primi anni fu chiaro che essa doveva essere applicabile (almeno nei suoi principi) a tutti gli enti chiamati (impropriamente) « *particelle* », (una notevole applicazione ne fece infatti *Gamow* alle particelle alfa). Oggi sappiamo che è vero che per tutte le cosiddette « *particelle* » (oggi assai più numerose di allora) vale una M. O., ma che questa non è esattamente la stessa per tutte. Quella di Schrödinger si deve considerare come la approssimazione non relativista della M. O. delle particelle prive di spin (oggi sappiamo che ne esistono: i mesoni π e K).

Per le altre particelle la M. O. di Schrödinger è approssimata non solo perchè non è relativista, ma anche perchè non tiene conto dello spin (e del relativo momento magnetico). Un perfezionamento in questo senso fu introdotto da *Pauli* nel 1927, aggiungendo alle coordinate x, y, z , per rappresentare lo spin, una quarta variabile, suscettibile di due soli valori

(il che equivale a sostituire alla ψ due funzioni $\psi_1(x, y, z, t)$ e $\psi_2(x, y, z, t)$). Si ottiene così una teoria non relativista applicabile a tutte le particelle a spin $\hbar/2$ come gli elettroni, i protoni e i neutroni.

Ma gli effetti dello spin sono, nella maggior parte dei casi, dello stesso ordine di grandezza delle correzioni relativistiche. E di entrambi gli effetti, difatti, rende conto simultaneamente la M. O. relativista, dovuta a *Dirac* (1928) della quale farò ora un brevissimo cenno.

Se la stessa sostituzione (18), con cui dalla hamiltoniana classica si ricava l'equazione di Schrödinger, si applica alla hamiltoniana relativista, si ottiene l'equazione detta di *Klein-Gordon*, che si può scrivere (limitandoci al caso di assenza di forze)

$$(20) \quad \Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi.$$

Essa è relativisticamente invariante, ma non tiene conto dello spin. Si può considerare quindi come l'equazione della M. O. dei *pioni* (o *mesoni* π).

La teoria di Dirac invece, applicabile agli elettroni e a tutte le altre particelle di spin $\frac{\hbar}{2}$, sostituisce alla unica ψ una quaterna di funzioni ($\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$), che nelle trasformazioni di Lorentz si trasformano secondo una certa legge per cui si possono considerare come le componenti di un ente intrinseco chiamato *spinore*. Si impone ad esse di soddisfare un sistema di quattro equazioni del 1° ordine in x, y, z, t , che si possono scrivere sinteticamente, con notazione matriciale e usando le notazioni relativistiche ($x_4 = ict$):

$$(21) \quad \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

(dove le γ_{μ} sono quattro matrici quadrate di 4° ordine e ψ è la matrice a una colonna delle $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$). Le matrici γ_{μ} sono

scelte in modo che l'equazione di Klein-Gordon sia una conseguenza delle (21) per le quattro ψ_μ . La densità di presenza è

$$(22) \quad \varrho = \sum_{\mu}^4 |\psi_\mu|^2.$$

Questo formalismo ha condotto a due risultati di grande interesse fisico. In primo luogo esso rende conto in modo perfetto dello spin $\hbar/2$ e delle sue singolari proprietà di quantizzazione, nonchè del momento magnetico ad esso collegato, per il quale fornisce il valore (detto « *magnetone di Bohr* »)

$$(23) \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Il valore sperimentale è invece $\mu_0(1,001145 \pm 0,000013)$. La concordanza è notevole, ma la differenza è al di fuori degli errori sperimentali: ne riparlerò tra un momento.

In secondo luogo, la teoria di Dirac conduce alla inaspettata previsione di stati a energia (intrinseca) negativa, o se si vuole a massa negativa. Questi stati, con una ingegnosa ipotesi che sarebbe troppo lungo spiegare, sono stati ricollegati all'esistenza di *antiparticelle* di cui la prima, scoperta nel 1932 (5 anni dopo la teoria di Dirac) è il *positone*, o elettrone positivo.

LA DIFFRAZIONE DEGLI ELETTRONI E DEI NEUTRONI.

Dedicherò il resto di questa relazione a una rapida rassegna delle principali applicazioni della M. O. e ad alcune delle sue conferme sperimentali.

La prima di queste conferme fu, come è noto, la diffrazione degli elettroni da parte di un cristallo, scoperta da *Davisson* e *Germer* nel 1927 in base alle previsioni della M. O. È difficile immaginare, per chi non ne ha memoria personale, quale enorme impressione produsse tra i fisici questo fenomeno che contrastava così apertamente con l'immagine corpuscolare degli elettroni, a cui tutti eravamo abituati.

Le esperienze di Davisson e Germer furono subito ripetute in vari laboratori con tecniche diverse e sempre più raffinate, e si riuscì così a verificare con notevole precisione la relazione (II) tra lunghezza d'onda di de Broglie e quantità di moto degli elettroni. Si è in particolare verificato che, quando si tratta di elettroni di energia cinetica non trascurabile rispetto a mc^2 , è la espressione relativistica di p , e non quella classica, che va posta nella (II).

Oggi, il fenomeno della diffrazione elettronica è utilizzato correntemente (mediante apparecchi che si trovano in commercio) per lo studio della struttura degli strati superficiali dei solidi (p. es. per lo studio delle alterazioni di struttura prodotte da pulimento, da gas occlusi etc.). Questa tecnica è assai superiore, per tali scopi, a quella fondata sulla diffrazione dei raggi X, perchè questi ultimi penetrano in profondità e sono quindi più adatti a dare informazioni sulla struttura dell'interno del solido, mentre la diffrazione elettronica avviene essenzialmente in superficie.

Accanto alle esperienze di diffrazione degli elettroni vanno anche ricordate quelle di diffrazione dei *neutroni* su cristalli le quali, fatte per la prima volta nel 1936 da *Halban e Preiswerk*, si sono sviluppate soprattutto dopo che l'invenzione dei reattori nucleari ha reso disponibili sorgenti assai intense di neutroni (ricorderò in particolare le esperienze di *Fermi, Marshall e Marshall* del 1947). Queste esperienze hanno dimostrato direttamente la validità della M. O. anche per i neutroni e hanno fornito uno dei metodi migliori per realizzare fasci monoenergetici di neutroni.

LA STRUTTURA DEGLI ATOMI.

Il più vasto campo di applicazione della M. O. è senza dubbio la struttura degli atomi e delle molecole. In linea di principio dalla sola conoscenza del numero atomico (e, per certi dettagli di alta precisione, anche della massa atomica e del momento magnetico del nucleo) dovrebbe essere possibile

ricavare tutte le proprietà non nucleari dell'atomo: in particolare, i livelli energetici e quindi lo spettro (e questa è la prova più severa per la teoria, data la abbondanza e la precisione dei risultati sperimentali in spettroscopia) e inoltre le proprietà magnetiche, elettriche e chimiche.

Questo ideale è raggiunto perfettamente per gli atomi di *idrogeno* e di *elio*, e per gli ioni ad essi analoghi. La spiegazione dello spettro dell'idrogeno, come è noto, era già stata ottenuta dalla vecchia teoria quantistica di *Bohr* e *Sommerfeld*, ma questa teoria falliva completamente nel caso dell'elio. La M. O. invece superò felicemente anche questa prova. Naturalmente, per rendere conto della « *struttura fina* » di questi spettri, non basta l'equazione di Schrödinger ma si deve far uso della M. O. relativistica con spin, cioè della equazione di Dirac. Per dare un'idea quantitativa del significato di « *struttura fina* », dirò che le righe spettrali dell'idrogeno, che in un comune spettroscopio appaiono semplici, con mezzi di alta risoluzione si rivelano essere gruppi di righe le cui frequenze differiscono fra loro di meno di $1/10.000$ del loro valore. Fino a questo grado di precisione la M. O. relativista di Dirac è in accordo con l'esperienza.

Ma qui incontra anche uno dei suoi limiti. La tecnica delle microonde ha reso possibile misurare indirettamente differenze di livelli ottici molto minori di quelle della struttura fina. È stato così scoperto, nel 1947, da *Lamb* e *Retherford*, che i due livelli dell'idrogeno $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$, che secondo la M. O. dovrebbero coincidere, differiscono tra loro di $1,28$ milionesimi del loro valore. Questo spostamento (chiamato *Lamb-shift*) è stato spiegato con grande esattezza dalla *teoria dei campi*, come un effetto della interazione dell'elettrone col suo proprio campo di radiazione, effetto di cui la M. O. non tiene conto. Lo stesso effetto spiega assai esattamente la piccola differenza, che ho rilevato poco fa, tra il valore sperimentale del momento magnetico dell'elettrone e il momento μ_0 (form. 23) dato dalla M. O.

Se dall'idrogeno e dall'elio passiamo ad atomi di numero atomico più elevato, il calcolo dei livelli energetici con la M. O. diviene enormemente più complicato e può essere fatto solo

con metodi di calcolo approssimati. È particolarmente notevole in questo campo la monumentale opera di *D. R. Hartree* e dei suoi collaboratori, che dal 1927 in poi hanno sviluppato e applicato a numerosi atomi un metodo di approssimazioni successive detto dei « *campi autocompatibili* ».

Negli ultimi anni, naturalmente, l'uso dei calcolatori elettronici ha permesso di affrontare questi problemi con molto maggiori risorse. Bisogna dire però che sono pochissimi i fisici che si dedicano a questo lavoro. Va segnalato in particolare il gruppo diretto dall'italo-israeliano *Racah*, che ha calcolato sistematicamente atomi e ioni assai complessi come i metalli ferrosi e le terre rare. Il problema matematico, per il quale si usa la macchina elettronica, consiste principalmente nel diagonalizzare delle matrici di ordine pari al numero dei livelli energetici che interagiscono (p. es. in un caso tipico 46). I livelli così calcolati vengono usati per calcolare le frequenze dello spettro, che poi sono messe a confronto con lo spettro osservato.

In questi casi, naturalmente, la concordanza non è di alta precisione come quella che si ottiene per l'idrogeno e per l'elio, ma lo scopo di questi calcoli non è tanto quello di ottenere una conferma della teoria, quanto di avere un criterio per la classificazione delle numerosissime righe di questi spettri e per il loro coordinamento ai vari tipi di transizione.

LA STRUTTURA DELLE MOLECOLE.

Per quanto riguarda la *struttura delle molecole* devo ricordare anzitutto che uno dei risultati più importanti conseguiti dalla M. O. è stata la scoperta, dovuta ad Heisenberg, della cosiddetta « *forza di scambio* ». È questa una forza che, secondo la M. O., si deve manifestare tra due nuclei (indipendentemente dalla loro repulsione elettrostatica) quando nel loro comune campo di forza esiste un sistema di onde di de Broglie stazionarie, cioè quando due atomi vengono ad avere uno o più elettroni in comune. Questa forza (la cui interpretazione intuitiva è piuttosto difficile) è una conseguenza diretta dei principi della

M. O. e del principio di Pauli, e fornisce la spiegazione dei *legami chimici omeopolari*.

È stato questo il punto di partenza di un vastissimo campo di ricerche, chiamato talvolta « *chimica quantistica* », il cui oggetto è dedurre per quanto possibile le proprietà fisiche e chimiche delle molecole dai principi della M. O. Naturalmente l'integrazione dell'equazione di Schrödinger per gli elettroni di una molecola richiede in generale calcoli ancora più complessi che per un solo atomo, e si deve fare largo ricorso ai metodi di calcolo numerico. Ricorderò tra i principali risultati di queste ricerche:

a) — la configurazione *geometrica* della molecola, cioè la posizione relativa dei nuclei e la distribuzione spaziale della densità di presenza dei singoli elettroni;

b) — il calcolo (che ne discende immediatamente) dei *momenti d'inerzia* della molecola rispetto ai vari assi baricentrici, e quindi le frequenze degli spettri di rotazione;

c) — le frequenze dei vari modi di *vibrazione* della molecola, che (insieme alle precedenti) costituiscono lo spettro infrarosso;

d) — i *livelli energetici degli elettroni*, e quindi lo spettro di bande visibili e ultraviolette.

LA FISICA DEI SOLIDI.

Gli elettroni appartenenti agli atomi di un cristallo si trovano soggetti non solo al campo di forza del proprio atomo ma anche a quelli degli altri atomi del reticolo cristallino. Per calcolarne la ψ si deve dunque porre, nella equazione di Schrödinger, una $U(x, y, z)$ periodica in ciascuna delle coordinate.

La propagazione delle onde di de Broglie in un tale campo di potenziale periodico è stata studiata specialmente da *Brillouin*, utilizzando i lavori matematici di *Mathieu* e di *Hill*. Essa dà luogo a una curiosa distribuzione dei livelli energetici in « *bande* », praticamente continue, separate da intervalli

vuoti. Da questa distribuzione dei livelli è possibile ricavare (utilizzando anche i risultati fondamentali della *statistica di Fermi*) le proprietà *elettriche, termiche e magnetiche* del cristallo, il suo spettro di assorbimento nel *visibile* e nell'*ultravioletto* e il suo spettro di *Röntgen*. In particolare, la teoria spiega la distinzione, così caratteristica, dei solidi in tre classi nettamente e qualitativamente distinte nei riguardi della conduzione elettrica (*conduttori, semiconduttori ed isolanti*) e spiega anche perchè alcuni metalli siano *ferromagnetici* ed altri no. Oggi, come è noto, la fisica dei solidi è uno dei campi più fiorenti della fisica, ed è anche ricca di applicazioni pratiche, tra cui forse la più notevole è l'invenzione del *transistor*, che difficilmente sarebbe stata possibile senza la teoria della conduzione elettrica fornita dalla M. O.

LA TEORIA DEI CAMPI E I LIMITI DI VALIDITÀ DELLA MECCANICA ONDULATORIA.

I concetti fondamentali ed i metodi della M. O. si applicano, come ho già accennato, non solo agli elettroni, per i quali essa fu creata, ma anche a tutti gli altri enti che seguiamo a chiamare convenzionalmente « particelle », benchè ciascuna di esse sia rappresentata da una funzione d'onda (eventualmente a più componenti) ossia, come oggi si usa dire, da un « campo »: tali sono, oltre agli elettroni, i protoni, i neutroni, le varie specie di mesoni, i fotoni. P. es., i pioni (sia neutri, π^0 , che carichi, π^+ e π^-) sono rappresentati da una funzione d'onda ψ a una sola componente; gli elettroni, i protoni e i neutroni dalla ψ a quattro componenti della teoria di Dirac (e solo approssimativamente, come ho detto sopra, dalla ψ di Schrödinger); i fotoni dalle quattro componenti del potenziale elettromagnetico. Si noti che le particelle con carica elettrica sono rappresentate da funzioni d'onda complesse, quelle neutre (come i π^0 e i fotoni) da funzioni d'onda reali.

Le equazioni differenziali che reggono questi diversi « campi » sono delle generalizzazioni dell'equazione di Schrödinger,

e si possono ottenere tutte con un metodo unitario, che deriva dal principio di Hamilton. Si ammette che tutte le proprietà di ciascun tipo di particelle siano contenute in una espressione, formata con le componenti della funzione d'onda e le loro derivate, che si chiama « *densità di lagrangiana* » di quel tipo di particelle. Integrando la densità di lagrangiana in un dominio quadridimensionale dello spazio-tempo si ottiene un integrale, cui si impone di essere stazionario rispetto alle variazioni della funzione d'onda: così si ottengono le equazioni (relativisticamente invarianti) cui soddisfano le componenti della funzione d'onda. L'equazione di Klein-Gordon (20), quella di Dirac (21) e quella dei potenziali elettromagnetici, sono casi particolari di tali equazioni. Con opportune estensioni dei procedimenti classici si passa poi dal formalismo lagrangiano a quello hamiltoniano. E se nella stessa regione dello spazio-tempo coesistono diversi tipi di campo (p. es. onde di de Broglie e campo elettromagnetico) l'hamiltoniana del sistema si dovrà scrivere come somma delle hamiltoniane dei singoli campi, più un termine misto che rappresenta la loro interazione: è questo il modo più spontaneo e razionale di introdurre nei calcoli tale interazione.

Da questo punto di vista risulterà abbastanza chiaro quale è la principale imperfezione della M. O. di Schrödinger e di Dirac, e ciò che determina i limiti della sua validità. Si consideri, p. es., l'equazione di Schrödinger per l'elettrone dell'atomo di idrogeno: essa si ottiene dalla (8) ponendovi al posto di U il potenziale del campo elettrico dovuto al nucleo, cioè $-e^2/r$ (dove r è la distanza tra l'elettrone e il nucleo), valutato dunque come se l'elettrone e il nucleo fossero due cariche puntiformi. In altre parole, nell'espressione di U si adotta il modello corpuscolare, dimenticando momentaneamente la natura ondulatoria di tali enti. È questo, manifestamente, un modo di procedere poco coerente: il procedimento corretto consiste, in armonia con quanto ho detto poco fa, nel trattare il nucleo, l'elettrone e il campo elettromagnetico come tre campi in interazione tra loro. Da questa incoerenza deriva la già accennata piccola discre-

panza tra la M. O. e i risultati sperimentali, che si manifesta nel Lamb-shift, e che è perfettamente sanata dalla Teoria dei Campi.

Fortunatamente, in questo caso la M. O. rappresenta, come si vede, una approssimazione eccellente della Teoria dei Campi: lo stesso avviene praticamente in tutta la fisica atomica, in cui perciò la M. O. conserva tutta la sua validità. Dove invece la M. O. è del tutto insufficiente è nel dominio delle collisioni tra particelle di alta energia, come quelle dei raggi cosmici e dei moderni grandi acceleratori. In queste collisioni non è generalmente valida la legge della conservazione del numero delle particelle: p. es., la collisione di due protoni di alta energia può dar luogo a due protoni più un pione neutro, particella instabile che, dopo un tempo dell'ordine di 10^{-15} secondi, può decadere spontaneamente trasformandosi in un elettrone positivo, uno negativo e un fotone (oppure in altri modi). L'esperienza rivela una grande varietà di questi fenomeni, che la M. O. è del tutto incapace di interpretare. È questo il dominio di applicazione della Teoria dei Campi che, pur essendo ancora in fase di sviluppo, ha già raccolto larga messe di notevolissimi risultati, specialmente in quella parte di essa che riguarda le interazioni tra il campo elettromagnetico e gli elettroni, e che prende il nome di « Elettrodinamica Quantistica ».

L'operatore lagrangiano in meccanica quantistica.

Riassunto. — *Il formalismo lagrangiano della dinamica classica opportunamente ampliato serve ancora oggi a descrivere soddisfacentemente il movimento in regioni spaziali di diametro non inferiore a 10^{-13} cm. Si illustrano brevemente le difficoltà che si presentano nell'affrontare la dinamica a distanze inferiori a 10^{-13} cm e si accenna ai possibili sviluppi delle teorie future.*

Non è possibile in un discorso di così breve durata quale è quello che mi accingo a fare, di presentare in maniera esauriente sia pure alcuni aspetti dell'impostazione Lagrangiana della meccanica quantica moderna. Ho preferito dunque, piuttosto che addentrarmi nei dettagli di questioni particolari, che in ogni modo riuscirebbero di scarso interesse per la maggior parte dell'uditorio, svolgere la mia trattazione cercando di dare un rapido sguardo d'insieme sugli sviluppi più recenti del metodo lagrangiano nella dinamica subatomica.

C'è subito da dire che se da una parte possiamo ritenere che il metodo lagrangiano è quello che si è rivelato più efficace nell'arduo compito di creare un ordine intellettuale anche nella dinamica dei più piccoli dominî spaziali, che ci è dato attualmente di osservare, siamo ben lontani da quel mirabile stadio contemplativo che ci viene offerto dalla descrizione del movimento dei corpi su scala macroscopica od atomica.

Le difficoltà da superare sono ancora gravi come accenneremo in seguito e come è naturale che avvenga quando ci si

accinge a discorrere delle più riposte manifestazioni dinamiche della Natura.

È tuttavia titolo di merito straordinario del nostro sommo Lagrange che il suo nome ricorra ancora oggi così frequentemente nello studio di questi fenomeni da parte della fisica teorica.

I. — LA LAGRANGIANA E LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI HAMILTON NELLA DINAMICA NON RELATIVISTICA.

Mi sia consentito di richiamare alla mente, nella maniera più concisa possibile, l'uso che la dinamica classica fa della funzione di Lagrange.

Un problema dinamico a n gradi di libertà $q_1 \dots q_n$ è caratterizzato da una funzione di Lagrange

$$L(\dot{q}, q, t)$$

q sta brevemente ad indicare l'ennupla $q_1 \dots q_n$ delle variabili che per comodità chiameremo di posizione e delle loro derivate rispetto al parametro t che chiameremo tempo cioè delle velocità $\dot{q}$.

Se il funzionale $\int_{t_i}^t L dt$ ammette per ogni coppia di $N + 1$ valori q_i, t_i, q, t ; (facenti parte di un certo dominio) un unico estremale che rende cioè nulla la variazione prima $\delta \int L dt$, possiamo definire una metrica attraverso la funzione

$$(1) \quad S(q_i, t_i ; q, t) = \int_{t_i}^t L dt$$

essendo l'integrazione eseguita lungo l'estremale.

Si tratta della così detta azione globale durante il movimento da t_i a t indicata indifferentemente come distanza geodetica dei due punti q_i, q oppure anche funzione caratteristica oppure cammino ottico. La sua conoscenza esaurisce la trattazione di un problema di moto classico.

Eliminando le $\dot{q}$ per mezzo di:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -p_i$$

e introducendo ove possibile la funzione hamiltoniana $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$ si passa alla trattazione hamiltoniana del movimento. In essa si parla delle $2N$ variabili canoniche relative ad un dato istante, p_i, q_i (per l'istante t_i) o p, q (per t).

La trattazione hamiltoniana fa uso perciò della nozione di coordinata di posizione e di impulso corrispondente, invece di posizione e velocità del caso lagrangiano. Potrebbe sembrare superfluo volere stabilire distinzioni tra queste due impostazioni che sono equivalenti per la ricerca del movimento dei sistemi classici.

C'è di fatto che la meccanica quantica si è sviluppata storicamente adoperando l'impostazione hamiltoniana, con l'attribuire alle coordinate e impulsi canonici il ruolo di operatori hermitiani di uno spazio hilbertiano e col fissare le parentesi di commutazione tra due qualsivoglia variabili dinamiche con la ricetta:

$$2\pi i \{ \Omega_1(p, q) \Omega_2(p, q) - \Omega_2(p, q) \Omega_1(p, q) \} = 2\pi i [\Omega_1, \Omega_2]$$

(che è un operatore hermitiano) pari alla costante di Planck per la parentesi di Poisson classica:

$$2\pi i [\Omega_1, \Omega_2] = h \sum_k \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_k} \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_k} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_k} \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_k} \right)$$

in questo c'è da porre in evidenza che si tratta di quantità invarianti per trasformazioni canoniche. Nel membro di destra Ω_1 e Ω_2 si intendono variabili classiche e non operatori.

Non è facile in meccanica quantica definire un'operazione di differenziazione rispetto ad un operatore qualunque, perciò non fu facile tradurre in meccanica quantica le equazioni del

moto di Lagrange che implicano operazioni di derivazioni parziali rispetto a coordinate e velocità.

Nell'impostazione hamiltoniana si usano i riferimenti dello spazio hilbertiano che rendono diagonali il massimo numero di variabili dinamiche indipendenti caratterizzanti un certo sistema. Supponiamo che queste siano le q_i relative ad un dato istante t_i e sia $\psi(q_i, t_i)$ l'autofunzione corrispondente. L'evoluzione temporale del riferimento è retta dall'equazione integrale

$$(2) \quad \psi(q, t) = \int G(q, t; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i; \quad (t > t_i)$$

equivalente all'equazione di Schroedinger ⁽¹⁾

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

dq_i sta per l'elemento di volume a N dimensioni delle N coordinate q_i . Questa equazione, che è poi l'espressione analitica della costruzione di Huygens nel senso che il fronte d'onda $\psi(q_i, t_i)$ dell'istante iniziale t_i migra per formare all'istante t il fronte d'onda $\psi(q, t)$, è a fondamento della meccanica quantica come di un qualsiasi fenomeno in cui si tratta di propagazione di un segnale. La conoscenza della funzione ⁽²⁾ G che opera questa trasformazione esaurisce infatti il problema del moto nel senso che $|G|^2$ è la probabilità che si realizzino le configurazioni q all'istante t se una misura delle configurazioni all'istante t_i ci ha dato q_i .

È $G(q, t; q_i, t_i)$ che va posto a confronto colla funzione caratteristica $S(q, t; q_i, t_i)$ della dinamica classica, costituendo lo

⁽¹⁾ $\hbar$ sta abbreviatamente per $\frac{h}{2\pi}$.

⁽²⁾ G è solo impropriamente una funzione, è effettivamente quella che i matematici chiamano oggi una distribuzione. Basti pensare che $G(q, t; q_i, t_i)$ deve essere altamente singolare per poter riprodurre $\psi(q, t) = \psi(q_i, t_i)$ per $t = t_i$. Inoltre $\int G(q, t; q_i, t_i) \cdot dq_i = 1$. A G si attribuiscono correntemente nomi diversi, quali ad esempio di funzioni di Green o più semplicemente di propagatori.

strumento che permette di introdurre in meccanica quantica il metodo lagrangiano.

In una celebre memoria ⁽³⁾ del 1932 Dirac ha chiaramente indicato per primo come ciò è possibile. Se poniamo $A = e^{\frac{iS}{\hbar}}$ l'analogia tra A e G diventa palese. Occorre per questo considerare la proprietà grupale del propagatore ⁽⁴⁾

$$(3) \quad (q_t | q_i) = \int (q_t | q_{t_1}) dq_{t_1} (q_{t_1} | q_i); \quad (t_1 > t_i)$$

o più in generale

$$(4) \quad (q_t | q_i) = \int (q_t | q_m) dq_m (q_m | q_{m-1}) dq_{m-1} \dots (q_2 | q_1) dq_1 (q_1 | q_i)$$

essendo $q_m \dots q_1$ le coordinate corrispondenti a una suddivisione qualsiasi dell'intervallo temporale (t_i, t) con m intervalli intermedi $t_1 \dots t_m$.

Potendosi scegliere l'intervallo tra t , t_m piccolo a piacere, basta conoscere l'analogo classico di $(q_{t+dt} | q_t)$ che risulta essere $e^{\frac{i}{\hbar} L dt} = e^{\frac{i}{\hbar} S(q_{t+dt}, q_t)}$.

Parimenti possiamo affermare che la lagrangiana non è tanto da intendersi una funzione oltre che di una certa posizione anche della velocità ad essa concatenata quanto una specie di misura da associare ad una coppia di coordinate.

Più precisamente si può scrivere ⁽⁵⁾

$$(5) \quad (q_{t+dt} | q_t) = h^{N/2} \sqrt{\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_t \partial q_{t+dt}} \right\|} e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

essendo il determinante formato da $\partial^2 S / \partial q_t \partial q_{t+dt}$ e ciascuna q si intende corrispondere agli N gradi di libertà. Con l'ausilio

⁽³⁾ *The Lagrangian in quantum mechanics: Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, vol. 3 (1933); si veda anche il volume dello stesso autore: *I fondamenti della meccanica quantica*, Boringheri, Torino.

⁽⁴⁾ Per scrivere di meno e secondo la consuetudine al posto di $G(q, t; q_i, t_i)$ porremo $(q_t | q_i)$.

⁽⁵⁾ C. MORETTE, « Phys. Rev. », **81**, 848 (1951).

di (5) è possibile con un procedimento di passaggio a limite porre in relazione sostanzialmente il propagatore con una integrazione di un prodotto infinito. Non vogliamo insistere più oltre perchè, a parte casi particolari, non è fino ad oggi stato possibile di stabilire l'esistenza ed eseguire perciò il calcolo di questo limite ⁽⁶⁾. Per ovviare a questo inconveniente i fisici teorici ricorrono a procedimenti iterativi senza peraltro essere in grado di valutare l'errore che si commette fermandosi ad un dato ordine. Occorre menzionare che la nozione di traiettoria classica è contenuta in (4). Se infatti nella valutazione di (4), gli infiniti « canali » corrispondenti alle infinite scelte particolari di una suddivisione intermedia $q_m \dots q_r$ danno contributi positivi e negativi che si compensano vicendevolmente con un solo canale che partecipa al valore effettivo di $(q_i|q_i)$ si ha la traiettoria classica, cioè l'estremale del principio d'azione classico. Sono tuttavia le proprietà analitiche della lagrangiana nella sua dipendenza dalle coordinate che determinano l'esistenza e le condizioni nelle quali questo unico canale classico si realizza ⁽⁷⁾.

Le deviazioni nascono laddove esistono regioni in cui la lagrangiana cessa di essere olomorfa, e le energie in gioco nel movimento sono abbastanza elevate perchè queste regioni vengano effettivamente esplorate, le conseguenze fisiche consistono nei fenomeni di diffrazione.

Le equazioni differenziali di una trasformazione di contatto:

$$(6) \quad p_i = - \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

acquistano in meccanica ondulatoria un significato operatoriale quando si faccia uso di (4) e (5).

⁽⁶⁾ « Rev. of Modern Phys. », **20**, 367 (1948). Feynmann che ha elaborato le idee di Dirac dice testualmente a questo proposito: « Ci si sente come Cavalieri di fronte al problema della valutazione del volume di una piramide prima dell'invenzione del calcolo infinitesimale ».

⁽⁷⁾ Si confronti ad es. M. VERDE, *On the Green's function of potential scattering*, N. C. **28**, 547 (1963). Qui si mostra come per il movimento centrale di una particella in un campo di forze conservative l'analiticità del potenziale permetta di ritrovare il canale classico.

2. — MECCANICA QUANTICA RELATIVISTICA.

L'impostazione lagrangiana di un problema di moto è di particolare rilievo quando le velocità diventano confrontabili con quella c della luce. Occorre infatti che la dinamica rispetti il principio di relatività ristretta per avere una descrizione indipendente dal sistema inerziale particolare in cui si studia il moto.

Il metodo hamiltoniano si presta male a questo scopo. In esso infatti il tempo occupa una posizione privilegiata rispetto alle coordinate spaziali. Se consideriamo due corpi distanti spazialmente di Δs non ha significato fisico parlare di influenza dinamica dell'uno sull'altro per durate Δt inferiori a $\frac{\Delta s}{c}$.

Queste distanze temporali anche se positive in un riferimento possono diventare nulle o negative in un altro e non si può pensare ad un nesso causale tra i due corpi. Ogni azione dinamica per essere trasferita da un corpo all'altro ha bisogno di un segnale che in ogni modo non può viaggiare con velocità superiore a quella della luce.

Il comportamento dinamico di un corpo a partire da un certo istante può predirsi solo se si ha conoscenza del moto dell'altro per un periodo di tempo antecedente almeno della durata $\frac{\Delta s}{c}$. Nel metodo hamiltoniano il movimento futuro si predice invece in base alla conoscenza presente della configurazione dinamica. Ciò non esclude a priori una trattazione relativistica della interazione mutua dei due corpi col formalismo hamiltoniano ma per questo occorre necessariamente introdurre accanto ai due corpi un sistema ad infiniti gradi di libertà, cioè un campo. In esso si accumula e si propaga l'informazione dinamica che manca per la descrizione di un'azione ritardata tra i due corpi. Ciò rende malagevole la descrizione matematica dell'interazione reciproca.

Con il metodo lagrangiano non si può naturalmente fare a meno della nozione di campo, anzi questa occupa una posizione di primo piano, ma la dinamica dei campi può trattarsi

indipendentemente dalle sorgenti e le interazioni reciproche di queste ultime valutarsi più speditamente.

Infatti ad opera di Feynmann, Schwinger ⁽⁸⁾ ed una legione di altri fisici teorici, abbiamo assistito nell'ultimo decennio ad un vigoroso sviluppo della dinamica quantica relativistica, che ha condotto almeno nel caso dell'interazione elettromagnetica alla predizione quantitativa di importanti dati sperimentali che non si lasciano interpretare nel quadro della meccanica ondulatoria.

Tutto l'edificio che si è così costruito poggia sulla nozione di campo così detto « libero » che non ha un significato fisico diretto, non solo perchè le osservabili fisiche ne dipendono bilinearmente, ma anche perchè non è possibile eseguire localmente la misura di un campo libero.

I campi sono insiemi di funzioni $\Phi_\mu(x_a)$ delle quattro coordinate dello spazio-tempo $x_a (a = 1, 2, 3, 4)$ che subiscono rispetto al gruppo completo di trasformazioni non omogenee di Lorentz delle sostituzioni lineari classificabili matematicamente: le così dette rappresentazioni irriducibili.

Non c'è isomorfismo tra i possibili campi liberi ed il gruppo di Lorentz. Ci sono infatti due classi di campi liberi che si chiamano bosoni e fermioni. I secondi si distinguono rispetto ai primi per il fatto che le sostituzioni lineari secondo le quali si trasformano a seguito di cambiamento di riferimento sono definibili a meno del segno algebrico. Si parla di tensori nel primo caso e di spinori nel secondo. Naturalmente il comportamento di tali campi rispetto alle operazioni improprie del gruppo di Lorentz come ad esempio l'inversione di segno delle coordinate spaziali o della variabile temporale è importante onde si parla di scalare oppure di pseudoscalare, di vettore o di pseudovettore e così via.

La lagrangiana dei campi liberi si assume essere la più semplice possibile compatibilmente all'esigenza di dare luogo a fenomeni di propagazione che rispettino oltre alla covarianza

(8) Si confronti ad es.: J. SCHWINGER, *Selected papers on quantum electrodynamics*, « Dover Publ. », New York, 1958.

relativistica alla conservazione di tutti quegli attributi dinamici che risultino costanti durante il movimento.

Ad ogni campo libero si suole far corrispondere una così detta particella elementare che osserviamo in Natura, ad esempio il fotone, gli elettroni, i nucleoni ed i mesoni e perciò ciascun campo dovrà corrispondere al loro stato di polarizzazione, alla loro massa e carica elettrica o di altro genere. Si è parlato di corrispondenza, perchè di fatto un campo libero descrive una particella reale solo parzialmente, ed in un modo ancora oggi insoddisfacente.

Di concerto con gli affinamenti delle tecniche sperimentali si ha una conoscenza sempre più larga di una struttura dinamica intrinseca delle particelle. Per spiegare ad esempio alcuni fenomeni d'urto o di decadimento radioattivo si è costretti ad introdurre numeri quantici nuovi che non sono collegati a gradi di libertà spaziali (traslazioni o rotazioni) ma a proprietà di spazi intrinseci. Mi basti qui ricordare il fenomeno dei multipletti di massa, cioè di gruppi di particelle elementari con masse leggermente differenti tra di loro, oppure certe regole di selezione che intervengono nella creazione delle così dette particelle strane, oppure alla scoperta recentissima di neutrini di tipo muonico e di tipo elettronico.

Il formalismo lagrangiano si presta ad essere opportunamente ampliato per includere queste proprietà fisiche nuove, ed offre in pochi casi anche il modo di spiegare queste strutture interne, quando tiene conto delle interazioni reciproche che si esercitano tra le particelle ⁽⁹⁾, e si è in grado di valutarne gli effetti. Occorre se mai essere insoddisfatti del contrario, perchè i possibili campi «liberi» teorici formano una varietà ben più ampia rispetto a quella che ci rivela attualmente la fisica sperimentale.

Lo schema lagrangiano è certamente adeguato per domini di dimensioni spaziali di diametro maggiore di 10^{-13} cm e le vere

⁽⁹⁾ Si pensi ad esempio alla spiegazione del momento magnetico dell'elettrone o alle deviazioni delle righe spettrali (Lamb-Shift) dell'*H* da quelle predette con l'equazione di Dirac.

complicazioni nascono quando si esplorano regioni di diametro inferiore.

Lo scalare più semplice che si possa formare con l'ausilio delle funzioni del campo e i loro gradienti fissa la scelta della lagrangiana libera. Per il campo elettromagnetico che è caratterizzato da un tetravettore reale $A_a(x)$, essa assume la forma:

$$(7) \quad L_{\text{fotone}} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial A^\beta}{\partial x_\alpha}.$$

particolarmente semplice perchè il fotone ha massa nulla, ed è elettricamente neutro.

Per gli elettroni

$$(8) \quad L_{\text{elet}} = \frac{i}{2} \sum_a \left(\bar{\psi} \gamma^a \frac{\partial \psi}{\partial x^a} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^a} \gamma^a \psi \right) - m \bar{\psi}(x) \cdot \psi(x)$$

ψ è lo spinore di Dirac a 4 componenti, $\bar{\psi}$ è il suo aggiunto in modo cioè che $\bar{\psi}\psi$ formi uno scalare reale, γ^a sono le matrici di Dirac e servono a contrarre $\bar{\psi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^a}$ in modo da formare uno scalare, m è la massa dell'elettrone libero, una quantità priva di senso fisico.

L'azione globale del campo è

$$(9) \quad A = \int L(x) dx$$

e le equazioni di Lagrange corrispondenti danno la propagazione dei campi liberi ⁽¹⁰⁾.

La nozione classica di campo è insufficiente a tenere conto di un importante dato dinamico espresso dal principio di esclusione di Pauli. Per gli elettroni ad esempio il fatto che al massimo uno solo di essi possa avere un dato quadrimpulso e stato di polarizzazione non è contenuto nella lagrangiana di sopra,

⁽¹⁰⁾ Nella eq. (9) x sta per l'insieme delle quattro coordinate x_a . Parimenti dx indica l'elemento di volume a quattro dimensioni $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

se L è una funzione classica. Occorre che L diventi un operatore che opera nel così detto spazio dei numeri di occupazione. In questo spazio si può introdurre un riferimento Φ corrispondente alle possibili situazioni dinamiche in cui ci si trova di fronte ad un certo numero di particelle con dati impulsi, energia e stato di polarizzazione. Lo stato Φ_0 di energia più bassa corrisponde all'assenza di particelle reali e si chiama vuoto. I campi operando su Φ_0 creano altri stati in cui ci sono particelle reali.

Quando i campi sono trattati come operatori non essendo tutti commutabili, occorre badare all'ordine con il quale essi appaiono in (7) ed (8). Questo viene definito in modo che le lagrangiane libere operando sul vuoto Φ_0 o su uno stato con date energie e impulsi, lo lasciano invariato (così detto prodotto normale).

L'evoluzione temporale dei campi *liberi*, che consiste nella conoscenza di Φ in ogni dominio spazio-temporale non ha perciò interesse dinamico. La vera dinamica si ha quando si aggiunga agli operatori lagrangiani liberi un operatore lagrangiano di interazione. Nell'esempio dell'elettrodinamica ⁽¹¹⁾

$$L_{\text{tot}} = L_{\text{fotone}} + L_{\text{elettrone}} + L_{\text{interazione}}$$

$L_{\text{int}} = e(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) \cdot A_\alpha$, costituisce lo scalare più semplice che si possa pensare sia locale e hermitiano e contragga una corrente elettrica $e(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)$ con il tetravettore del campo elettromagnetico.

L_{int} descrive quel gruppo di fenomeni noti sotto il nome di elettrodinamica quantica in cui assistiamo a creazione o distruzione di elettroni, positroni e fotoni.

Una volta dato lo stato iniziale, mediante l'ampiezza $\Phi(-\infty)$ occorre dedurre da esso l'ampiezza di probabilità di transizione ad uno dei possibili stati finali $\Phi(+\infty)$. Questo avviene attraverso l'equazione

$$\Phi(+\infty) = S\Phi(-\infty)$$

⁽¹¹⁾ Si osservi che in (7), (8) e oltre, le unità adoperate corrispondono a porre $\hbar = c = 1$.

ed il problema dinamico si riduce alla ricerca di S che è essenzialmente l'analogo del propagatore della meccanica quantica non relativistica di cui abbiamo già parlato.

In elettrodinamica quantica, così come è già stato detto per la dinamica non relativistica, la valutazione di S è possibile solo mediante uno sviluppo formale in serie di potenze della costante d'accoppiamento e del tipo

$$(10) \quad S = \sum_0^{\infty} \frac{e^n}{n!} \int S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n; \quad S_0 = 1$$

Nulla si sa sulla convergenza dello sviluppo, ma prima di affrontare tale questione, occorre stabilire la connessione tra operatore S_n simmetrico nei suoi argomenti x_n e la lagrangiana di interazione.

S deve essere un operatore unitario, vale a dire $S^+ S = S S^+ = 1$ e ciò comporta una restrizione per S_n . Occorre inoltre che sia soddisfatto il principio di causalità nel senso che per ogni sistema dinamico se variamo l'interazione in una qualunque regione spazio-temporale ciò deve avere conseguenze fisiche solo per gli eventi che sono posteriori nel tempo. Ciò basta a determinare per via ricorrente S_n quasi dappertutto quando siano noti gli $n - 1$ precedenti. In particolare per S_1 si hanno le condizioni:

$$S_1 + S_1^+ = 0 \quad [S_1(x), S_1(y)] = 0$$

se x e y sono eventi di tipo spaziale.

Il principio di corrispondenza per la ampiezza Φ suggerisce di porre $S_1 = iL(x)$. Le restrizioni di causalità e unitarietà danno per S_2 :

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 L(x_1) L(x_2) \text{ per } x_1 - x_2 \text{ di tipo temporale}$$

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 L(x_2) L(x_1) \text{ per } x_2 - x_1 \text{ di tipo temporale}$$

e questo si indica più brevemente con

$S_2 = -T(L(x_1)L(x_2))$ dove T indica la successione cronologica di x_1 e x_2 . Più in generale

$$(11) \quad S_n = i^n T(L(x_1) \dots L(x_n))$$

per cui formalmente S può scriversi:

$$S = T(e^{i\int L dt})$$

che è da porre in analogia con la forma del propagatore in meccanica non relativistica.

Come si è già accennato la determinazione di S_n attraverso le restrizioni di causalità, unitarietà e simmetria lascia ancora indeterminata la definizione di S_n per $x_1 = x_2 = \dots x_n$ nel senso che si può aggiungere ad S_n una distribuzione $iA_n(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ simmetrica nei suoi argomenti e scalare rispetto al gruppo di Lorentz ⁽¹²⁾.

Tener conto di termini in A_n da aggiungere a S_n è inevitabile perchè gli S_n definiti da (11) sono tali da dar luogo a risultati divergenti quando si esegua il calcolo delle ampiezze di probabilità di transizione tra particolari stati iniziali e finali ciò che implica sostanzialmente un'operazione di integrazione.

L'operatore iA_n serve a sottrarre queste divergenze nel senso che esse diventino integrabili e a fornire perciò un risultato finito al calcolo perturbativo di ordine n .

È stato dimostrato che tale procedimento è equivalente a ridefinire la lagrangiana di partenza nel senso di aggiungervi altri termini dello stesso tipo ma con masse e costanti di accoppiamento diverse. Si può anzi procedere al calcolo perturbativo senza incontrare le divergenze in tutti gli ordini di approssimazione se le nuove masse e costanti di accoppiamento sono opportunamente divergenti. Le divergenze vengono così trasferite dai singoli termini perturbativi alla lagrangiana di partenza. Questa è la filosofia della così detta teoria dei campi rinormalizzabili, che non è ovviamente soddisfacente.

Non è stato possibile neanche con modelli particolari ma aventi senso fisico, di stabilire la convergenza del calcolo perturbativo di una ampiezza di transizione, così che non è possibile di affermare che la convergenza dei singoli ordini per-

⁽¹²⁾ Si veda ad es.: N. N. BOGOLIVBOV e D. V. SHIRKOV, *Introduction to the theory of quantized fields*, Int. Publ. New York, 1959.

turbativi sia indispensabile, potendosi avere un risultato globale finito anche se frammenti della somma risultano divergenti.

Quello che si può dire con sicurezza è che solo pochi tipi di lagrangiane di interazione risultano essere rinormalizzabili. La Natura tuttavia ci offre un caso importante di interazione la cui lagrangiana non rientra in questa classe, la così detta interazione debole che è responsabile ad esempio del decadimento radioattivo del mesone μ in elettrone.

Allo stesso tipo di interazione sono da ascrivere quei numerosi fenomeni di radioattività naturale e indotta dei nuclei noti col nome generico di radioattività β , oltre a molti altri esempi di decadimenti mesonici e iperonici.

La sistemazione dinamica dell'interazione debole è avvenuta di recente e può considerarsi un forte argomento a favore dello schema lagrangiano. È infatti possibile interpretare questi disparati fenomeni con l'ausilio di un'unica costante di accoppiamento e un tipo di lagrangiana di interazione debole universale della stessa natura di quella già menzionata a proposito della elettrodinamica quantica. Essa tuttavia viola un principio che è a fondamento di ogni altro fenomeno dinamico, vale a dire la simmetria bilaterale di destra e sinistra o anche l'equivalenza delle descrizioni dinamiche fatte rispetto ad una terna di riferimento destrorsa e sinistrorsa.

Non ci è dato oggi scorgere in questa anomalia un significato fisico più recondito, ma è innegabile che essa serve a rafforzare la convinzione che comportamento dinamico della materia su scala subatomica e struttura geometrica dello spazio-tempo così come è contenuta nella lagrangiana di interazione sono aspetti intimamente collegati fra di loro.

Occorre richiamare l'attenzione sulla restrizione che si è imposta a priori alle possibili lagrangiane di interazione, che esse cioè debbano avere carattere locale vale a dire dipendere dai valori dei campi o delle loro derivate prime, il che implica un forte ottimismo sulla semplicità della struttura dinamica a piccolissime distanze.

Con lagrangiane non locali il problema della divergenza assume un aspetto completamente diverso. L'introduzione di

lagrangiane non locali può equivalere o ad accettare l'idea di un numero infinito di campi liberi e perciò di costanti di accoppiamento, oppure di credere all'esistenza di un dominio spaziale minimo il cui effetto sarebbe quello di modificare il comportamento analitico degli elementi di matrice S per quei fenomeni dinamici in cui si assiste a grandi trasferimenti di energia o di impulso.

All'impostazione lagrangiana non locale non è stato dedicato uno sforzo di ricerca confrontabile a quello impiegato per le teorie locali, non è possibile perciò pronunciarsi a favore o contro a tale ampliamento che va fatto in ogni modo.

Voglio invece concludere accennando brevemente ai tentativi più recenti diretti ad una interpretazione dinamica del mondo subatomico evitando di partire ab initio sui binari tracciati dal formalismo lagrangiano.

Si predica giustamente, ricorrendo ad una analogia storica fornita dalla rivoluzione compiuta dalla meccanica ondulatoria per descrivere correttamente la dinamica su scala atomica, che occorre anche oggi un nuovo passo rivoluzionario della stessa portata. Così come la meccanica ondulatoria ha eliminato nozioni dinamiche provenienti dal mondo macroscopico, quale può essere ad esempio quella di traiettoria di una particella, che non aveva senso come osservabile, occorre oggi liberarsi della nozione classica di campo definibile in ogni regione spazio-temporale.

Sappiamo infatti che quando si descrive uno stato dinamico attraverso il numero delle particelle che vi intervengono con i loro impulsi ed energia, il campo non è una grandezza ben definita e viceversa. Solo quando i campi sono molto intensi o il numero delle particelle è elevato, entrambe le nozioni sono compatibili. Si tratta di un aspetto del principio di complementarità di Bohr che ci è familiare dalla meccanica ondulatoria.

Si elimini dunque dalla trattazione teorica la nozione di campo e si abbandoni lo schema lagrangiano.

La scuola che avanza queste proposte vorrebbe si parlasse di proprietà analitiche delle sezioni d'urto nella loro dipendenza da proprietà dinamiche direttamente osservabili, e si sforza di trovare indicazioni attraverso un diretto confronto con i dati

sperimentali di concatenamenti tra diversi tipi d'urto. Qui le difficoltà riemergono sotto altra veste. Per poter fare affermazioni fisiche interessanti partendo dalla conoscenza delle sezioni d'urto sperimentali relative a valori necessariamente reali delle variabili fisiche che le caratterizzano quali angoli, impulsi energia momenti angolari e così via, occorre saper dedurre i prolungamenti analitici per valori complessi di queste variabili e stabilire i domini in cui essi sono attuabili.

Tale modo di procedere tuttavia non esclude a priori la possibilità di una descrizione lagrangiana universale che abbracci tutta la dinamica subatomica.

Esso equivale in qualche modo a voler invertire il problema. Invece di postulare un operatore di interazione lagrangiano e valutare le sezioni d'urto, si faccia uso delle sezioni d'urto e si deduca ove ciò sia possibile, l'esistenza di un operatore lagrangiano a cui esse corrispondono. Una conoscenza incompleta delle sezioni d'urto ci potrà dare un'informazione parziale della eventuale lagrangiana. Un tale modo di procedere è conforme alla filosofia del principio di corrispondenza; per domini spazio-temporali sufficientemente estesi dobbiamo ritrovare la meccanica ondulatoria o quella classica.

Le difficoltà di questa impostazione sono soprattutto di natura matematica. Esse si presentano già nella meccanica non relativistica dove tuttavia il problema può ritenersi soddisfacentemente avviato a soluzione ⁽¹³⁾. Se ciò sarà egualmente possibile nel caso relativistico è questione che occorre rimandare al futuro.

Istituto di Fisica Teorica della Università di Torino.

⁽¹³⁾ Si confronti ad esempio: M. A. NEUMARK, *Lineare Differentialoperatoren*, Cap. VIII, p. 354, « Akademie Verlag », Berlin (1960).

M. VERDE, *Helv. Phys. Acta*, Suppl. V, 231 (1960); « *Rendiconti Seminario Mat. Fis.* », Milano, Vol. 32 (1962).



INDICE

	(Pagine)
Saluto del Presidente dell'Accademia, prof. Giuseppe GROSSO, e conferimento del Premio internazionale « M. Panetti » al prof. William PRAGER	3-6
Ringraziamento del prof. William PRAGER	7
TRICOMI Francesco Giacomo, Sguardo generale all'opera di Luigi Lagrange	8-19
PICONE Mauro, Criteri sufficienti nel Calcolo delle variazioni e loro applicazioni	20-39
CINQUINI Silvio, Il calcolo delle variazioni e la semicontinuità	40-60
FAEDO Sandro, Il calcolo delle variazioni per gli integrali di Fubini-Tonelli	61-82
FRÉCHET Maurice, Le calcul des variations et ses extensions	83-87
CESARI Lamberto, Problemi di Lagrange con vincoli unilaterali	88-119
YOUNG L. C., Constructions élémentaires et méthodes abstraites dans le calcul des variations généralisé	120-137
FICHERA Gaetano, Un teorema generale di semicontinuità per gli integrali multipli e sue applicazioni alla fisica-matematica	138-151
STAMPACCHIA Guido, Il principio di minimo nel calcolo delle variazioni	152-171
GARNIER René, Sur le problème de Riemann-Hilbert	172-180
PRAGER William, Unilateral Constraints in Mechanics of Con- tinua	181-191
MIELE Angelo, Variational methods in aeronautics	192-240
PIGNEDOLI Antonio, La meccanica analitica e il suo sviluppo (con particolare riguardo al contributo della Scuola italiana)	241-303
AGOSTINELLI Cataldo, Il problema dei tre corpi dall'epoca di Lagrange ai giorni nostri	304-326
GRAFFI Dario, La teoria delle oscillazioni da Lagrange ai nostri giorni	327-344

	(Pagine)
SAUER Robert, <i>Problemi e progressi recenti dell'aerodinamica dei fluidi compressibili</i>	345-356
OVSIANNIKOV L. V., <i>Group properties of the hydrodynamic equations</i>	357-362
PRIGOGINE I. et P. RESIBOIS, <i>Temps et irréversibilité en physique statistique</i>	363-404
ZIN Giovanni, <i>Sui fondamenti della meccanica statistica</i> . . .	405-428
FINZI Bruno, <i>Dalla meccanica lagrangiana a quella einsteiniana</i>	429-451
PERSICO Enrico, <i>Sviluppi e risultati della meccanica ondulatoria</i>	452-471
VERDE Mario, <i>L'operatore lagrangiano in meccanica quantistica</i>	472-487
